

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
УЧИТЕЉСКИ ФАКУЛТЕТ У БЕОГРАДУ

Оливера С. Живановић

**ЕФЕКТИ ПРОБЛЕМСКЕ НАСТАВЕ У РАЗВОЈУ
СПОСОБНОСТИ МАТЕМАТИЧКОГ
МОДЕЛОВАЊА**

докторска дисертација

Београд, 2019.

UNIVERSITY OF BELGRADE
TEACHER'S TRAINING FACULTY

Olivera S. Živanović

**THE EFFECTS OF PROBLEM TEACHING ON
THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL
MODELLING SKILLS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2019.

Ментор:

Проф. др Јасмина Милинковић, ванредни професор, ментор
Универзитет у Београду, Учитељски факултет

Чланови комисије:

Проф. др Александар Липковски, редовни професор, председник комисије
Универзитет у Београду, Математички факултет

Проф. др Маријана Зељић, ванредни професор, члан комисије
Универзитет у Београду, Учитељски факултет

Проф. др Оливера Токић, ванредни професор, члан комисије
Универзитет у Београду, Учитељски факултет

др Јелена Станковић, доцент, члан комисије
Универзитет у Београду, Учитељски факултет

Датум одбране:

ЕФЕКТИ ПРОБЛЕМСКЕ НАСТАВЕ У РАЗВОЈУ СПОСОБНОСТИ МАТЕМАТИЧКОГ МОДЕЛОВАЊА

Сажетак

Организација наставног процеса који омогућава стицање квалитетног и ефикасног знања, применљивог у различитим животним ситуацијама, које поставља темеље за целоживотно учење, заснива се на имплементацији иновативних наставних система, међу којима проблемска настава има важну улогу посебно када је реч о настави математике.

Основни циљ истраживања дисертације је експериментално испитивање ефеката проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања. Испитана је ефикасност проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања при решавању једначина и неједначина у четвртом разреду основне школе и утврђен је утицај експерименталног програма на трансфер знања ученика, с обзиром на учење истих математичких садржаја традиционалним приступом.

Дескриптивном методом извршена је анализа, обрада и интерпретација резултата истраживања, који су потврдили истинитост и валидност хипотезе да проблемска настава представља ефикасно средство у развоју способности математичког моделовања. Ученици који су били део експерименталног програма показали су знатно виши ниво знања приликом решавања једноставних и сложених једначина и неједначина, потом у састављању текста на основу задатих иконичких и симболичких представа једначина и неједначина, те су показали и виши ниво способности у трансферу знања у другим тематским областима, с обзиром на ученике који нису били под утицајем модела. Индивидуалним интервјуисањем ученика испитани су њихови ставови у вези са улогом и значајем проблемске наставе на часу математике. Резултати су показали да ученици имају позитиван став према часовима проблемске наставе.

Проблемска настава, с обзиром на своје позитивне ефекте које је испољила на становишту развоја способности математичког моделовања, оправдано исказује потребу за својом применом у почетној настави математике.

Кључне речи: *проблемска настава, математичко моделовање, алгебарски садржаји, почетна настава математике.*

Научна област: Дидактичко-методичке науке

Ужа научна област: Методика наставе математике

УДК:

THE EFFECTS OF PROBLEM TEACHING ON THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODELLING SKILLS

Abstract

Organisation of the teaching process which enables acquisition of quality and effective knowledge applicable in different life situations and which lays the foundation for lifelong learning, is based on the implementation of innovative teaching systems, among which problem teaching has an important role especially when it comes to teaching mathematics.

The main research goal of this paper is experimental examination of the effects of problem teaching in the development of mathematical modeling skills. The effectiveness of problem teaching in the development of mathematical modelling skills in solving equations and inequalities in the fourth grade of primary school is examined. Also the influence of the experimental program on the transfer of students' knowledge is determined in contrast to learning of the same mathematical content by traditional approach.

Descriptive method was used for the analysis, processing and interpretation of the research results, which confirmed the truthfulness and validity of the hypothesis that claims that problem teaching is an effective tool in developing the ability of mathematical modeling skills. Students who took part in the experimental program showed a much higher level of knowledge when solving simple and complex equations and inequalities as well as in composing texts based on given iconic and symbolic representations of equations and inequalities, and showed a higher level of ability in transferring of their knowledge into other thematic areas, as opposed to the students not influenced by the model. Individual interviewing of the students examined their views regarding the role and the importance of problem teaching during mathematics classes. The results showed that students had a positive attitude towards the classes that are based on problem teaching.

Given its positive effects on the development of mathematical modeling skills, problem teaching justifies the need for its application in the early teaching of mathematics.

Key words: *problem teaching, mathematic modelling, algebraic contents, early teaching of mathematics.*

Scientific field: Didactic-Methodical sciences

Scientific subfield: Methodology of mathematics teaching

UDC number:

Садржај

Увод	8
I ТЕОРИЈСКИ ПРИСТУП ПРОБЛЕМУ	
1. Проблемска настава у почетној настави математике	13
1.1. Историјски аспекти проблемске наставе	15
1.2. Појмовно одређење проблемске наставе	17
1.3. Дидактичко-методичке одлике проблемске наставе	18
1.3.1. Проблемска ситуација, проблем и решавање проблема	20
1.3.2. Структура часа проблемске наставе	31
1.3.3. Принципи, облици и нивои проблемске наставе	36
1.3.4. Нека практична упутства за примену проблемске наставе	42
1.4. Реалистично математичко образовање као егземплар савремене примене проблемске наставе	43
1.5. Корелација између проблемске наставе и других наставних система	47
1.5.1. Хеуристичка настава	47
1.5.2. Програмирана настава	49
1.5.3. Пројектна настава	52
2. Математичко моделовање	56
2.1. Појам и основне детерминанте математичког моделовања у почетној настави математике	57
2.2. Улога и значај математичког моделовања у контексту проблемске наставе	63
2.3. Отворени проблеми као средство ефикасног развоја способности математичког моделовања	68
2.4. Математичко-кибернетички модели у почетној настави математике	71
2.5.1. Аритметичко-логички модели	74
2.5.2. Геометријски модели решавања проблема	81
2.5. Методички аспекти математичког моделовања	95
2.5.1. Фазе математичког моделовања	96
2.5.2. Врсте и нивои помоћи од стране наставника путем проблемске наставе	100
при развоју способности математичког моделовања	100
3. Алгебарске основе	103
3.1. Историјски развој алгебре	105
3.2. Алгебарско мишљење	106
3.3. Методички приступ изучавању алгебарских садржаја	107
3.3.1. Увођење појма променљиве	109
3.3.2. Једначине у почетној настави математике	113
3.3.3. Неједначине у почетној настави математике	118
3.3.4. Концепт функционалне зависности	121
4. Преглед досадашњих истраживања	124
II МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА	
1. Проблем и предмет истраживања	133
2. Циљ и задаци истраживања	133
3. Хипотезе истраживања	134
4. Варијабле у истраживању	135
5. Методе, технике и инструменти истраживања	135
6. Узорак истраживања	136
7. Опис истраживачких активности	137
8. Статистичка обрада података	138

III АНАЛИЗА И ИНТЕРПРЕТАЦИЈА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

1. Анализа резултата иницијалног теста	144
2. Анализа резултата I финалног теста	149
2.1. Решавање једноставних једначина и неједначина.....	153
2.2. Решавање сложених једначина и неједначина.....	156
2.3. Састављање текста задатка на основу иконичких и симболичких представа	159
3. Анализа резултата II финалног теста.....	161
4. Кратак осврт на компаративну анализу иницијалног, I и II финалног теста	166
5. Анализа и интерпретација најчешћих грешака које су ученици правили на тестовима знања ..	167
6. Ставови ученика у вези са ефектима имплементације проблемске наставе на часовима математике	176
6.1. Однос ученика према настави математике	177
6.2. Ставови ученика у вези са спровођењем проблемске наставе	178
6.3. Мишљења ученика у вези са задацима који су били саставни део проблемске наставе	180
7. Циљано посматрање ученика у процесу проблемске наставе на часу математике.....	182

IV ИМПЛИКАЦИЈЕ И ЗАКЉУЧЦИ

1. Методичке импликације	185
2. Закључци	188

ЛИТЕРАТУРА	192
-------------------------	-----

ПРИЛОЗИ

Прилог 1- Иницијални тест	209
Прилог 2- I финални тест	211
Прилог 3- II финални тест.....	213
Прилог 4- Протокол интервјуа	214
Прилог 5- Модели припрема у експерименталној настави	215
Прилог 6- Снимак часа.....	229
Изјава о ауторству	230
Изјава о истовестности штампане и електронске верзије докторског рада.....	231
Изјава о коришћењу	232
Биографија аутора	233

Увод

Ефикасност и модернизација наставног процеса, условљени су бројним образовним и друштвеним променама које имају кључну улогу у животу сваког појединца. Одувек се образовање посматрало кроз призму културних делатности чији је фактор заснивања био човек. Баш из разлога што се одувек веровало да је саставни део културе, прогрес образовања текао је несметано кроз човечанство, захтевајући наклоност и подршку од стране друштва кроз време. Слику времена које је иза нас задовољавали су исходи учења који су били фокусирани на усвајање стриктно теоријских знања, док се данас од школе очекује да код ученика подстиче развој компетенција које имају одлике интегрисаних знања, вештина и умења, а својствени су учењу путем решавања проблема. Да бисмо испунили очекивања и захтеве које пред нас ставља данашње, савремено образовање, неопходно је ући у свет иновација и адекватно искористити све предности које оне пружају. Битна одлика данашњег друштва заснива се на потенцирању самообразовања и усмерена је на развој стваралачког и критичког начина размишљања. С тим у вези главну подршку пружа нам имплементација савремених наставних система, међу којима проблемска настава има руководећу улогу.

Крећући се кроз основе и карактеристике проблемске наставе долазимо до сазнања да је њена примена најрелевантнија у настави математике. Овакав вид наставног система представља дидактичку стратегију којом се ангажују најсложеније мисаоне активности ученика (Мишчевић, 2007). Самостална истраживачка активност ученика важан је сегмент у учењу путем решавања проблема, нарочито ако одређена активност кореспондира са реалним животним ситуацијама. Што се тиче математичког образовања у Србији у оквиру коришћења различитих наставних система и иновативних поступака у настави у TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) 2015 циклусу налазе се подаци који указују на „доминацију традиционалних пракси – учитељи кроз фронтални начин рада објашњавају ученицима градиво, начин решавања задатака, а задатак ученика је да правила и поступке упамте“ (Ђерић, Станчић и Ђевић, 2017:162). Проблемска настава, као део савременог дидактичког система, доприноси подизању квалитета и ефикасности наставног процеса, те као таква може се комбиновати и са другим наставним системима и облицима учења.

Брунерова (Bruner, 1976) концепција учења говори о томе да ученици треба да се оспособе да математички мисле и да буду активни учесници у процесу стицања знања. Према његовом мишљењу свако знање одлика је одређеног процеса, а не крајњег производа. Савремена васпитно-образовна пракса налаже подстицање максималних мисаоних напора ученика како би се искоренило памћење и складиштење великог броја чињеница без икаквог повода, а с циљем усвајања знања методама наставе које ће омогућити да се трајно усвоје. Трајност усвојених знања своју примену не налази само у сличним ситуацијама, већ је много делотворнија у потпуно новим околностима што чини трансфер знања. Креирање пута који води до усвајања трајних знања налази се у структури имплементације проблемске наставе. Позитивни ефекти које проблемска настава остварује и пружа почетној настави математике су: „омогућава уместо вођења наставника-самовођење, уместо инструкције - самоинструкцију, уместо поучавања-самопучавање“ (Милијевић и Кољанчић, 2003: 373). Овај наставни систем подстиче развој когнитивних активности ученика, залаже се за аутономију ученика и делује на активацију одређених активности ученика које подржавају учење путем решавања проблема (Даутова, 2014; Вергелес & Денисова, 2014). С обзиром на то да проблемска настава пружа значајан допринос савременој настави математике, јасно је да њен удео и при развијању способности математичког моделовања није занемарљив.

Моделовање као процес саставни је део науке и технологије, чија је улога да реалне ситуације трансформише у форму апстрактног језика, као што је то језик математике. „Када се у настави бавимо математичким моделовањем, циљ није тренутно решавање појединачних проблема, већ уочавање класе ситуација које се могу описати истим моделом. Сврха математичког моделовања садржана је у чињеници да верно приказује примарну структуру феномена који се проучава најчешће у облику „графика, једначине или алгорита“ (Милинковић, 2014: 46). Предмет моделовања може представљати „сваки објекат физичке, органске, психичке, друштвене и мисаоне стварности, односно њихова структура и понашање“ (Пинтер, 1997: 11). Проблеми који су верне слике свакодневних животних ситуација углавном одишу одређеним нивоом комплексности, која се може декомпоновати и разбити само уз помоћ добро одабраног модела.

Многа истраживања (Watters, English & Mahoney, 2000; Niss, Blum & Galbraith, 2007; Zloکار, 2012; Stjepanović, 2012) оправдала су позитиван утицај математичког моделовања у почетној настави математике, нарочито када је у питању стицање знања и развој компетентности ученика да сваком проблему приступе помоћу релевантног модела и тим путем изнађу његово решење. Бавећи се изучавањем садржаја у вези са једначинама и неједначинама фокус је био на проучавању процеса њиховог састављања и решавања, при чему је значајну улогу одиграла развијена способност математичког моделовања.

Гревмејер и Тервел (Gravemeijer & Terwel, 2000) истакли су значај математичких модела и симбола у смислу развоја и разумевања многим математичких појмова. Њихова главна идеја била је усмерена на различите облике симболизације чију су срж чинили разноврсни модели који се „појављују у смислу активности које налажу доступност таквих симболичких представа, и да функционални захтеви ових активности подстичу развој симболизовања код ученика“ (стр.2). Овај процес аутори су посматрали као крајњи исход ученикове максималне активности у почетној настави математике. Проблем разумевања структуре и начина решавања једначина и неједначина био је у домену многих истраживања. Давидов је спровео истраживање у коме су ученици млађих разреда основне школе имали задатак да на основу предочених проблемских ситуација у виду иконичке представе (слике) запишу једначине које их представљају. У овом истраживању настојало се да се прикаже веза између делова и целине. Целине и делови на сликама били су приказани помоћу слова, која су касније повезивана у словне једнакости, чији је крајњи резултат био састављање једначине. Примењујући овакав поступак закључно је да је код ученика могуће развијати способности које ће га упућивати да праве слике и шеме које су у вези са формулама облика $k = a - b - c - m$ (према: Kieran, 1992).

Вагнер са сарадницима (Wagner et al., 1984) је осмислио истраживање са ученицима основних и средњих школа, где су ученици требали да покажу да ли разумеју структуралне одлике једначина. Конкретно, од ученика је захтевано да упореде једнакости облика: $5 \cdot a + 10 = 100$ и $5 \cdot b + 10 = 100$, односно да објасне шта је веће a или b ? Истраживање је резултирало ситуацијом у којој је трећина ученика одговорила тачно без решавања једначина, док су се остали водили мишљу да је једначине прво потребно решити. Такви резултати недвосмислено потврђују чињеницу да су ученици показали да не разумеју структуру једначина јер су се везивали за схватање истих у процедуралном контексту. Кијеран (Kieran, 1981) је такође на основу својих истраживања са ученицима млађег школског узраста у вези са једначинама дошла до закључка да се у сазнајним доменима ученика не налази структурално схватање једначина.

Сфард (Sfard, 1987) је осмислила истраживање са ученицима старијег школског узраста чија је главна одлика била транспоноване текстуалних проблема у једначине и објашњавање правила и поступака који се могу примењивати у сличним ситуацијама. Резултати су показали да су ученици били много спретнији при објашњавању алгоритма који је водио до решења, него у састављању једначина које су требале бити верна слика постављене проблемске ситуације. Осим проблема разумевања структуре једначина, наметнуо се и нови проблем који је у вези са разумевањем структуре и поступка решавања неједначина. При сусрету са неједначинама ученици су се најпре ослонили на претходна искуства и повезали их са једначинама што је условило погрешну интерпретацију резултата неједначина. Овај проблем разматрао је Тол који истиче да „знање, настало при решавању линеарних једначина, узрокује проблеме код неједначина“ (Tall, према: Зељић, 2014: 141). Како би ученици успешно разумели појам неједначина морају имати способност да изврше интеграцију различитих модела и кључних особина које представљају споменути појам (Goldin & Shteingold, 2001).

Нека од истраживања (Kieran, 2004; Tall, 2004) показала су да се главни проблем неуспешног разумевања, представљања и решавања неједначина гради на замци која почива на вези између једначина и неједначина. С тим у вези, многи аутори (Kaput, 2000; MacGregor, 2001; Warren, 2003) се придржавају ставова да наставу математике треба усмерити на интегрисање процедуралних и структуралних приступа једначинама и неједначинама, што у свом домену подржава активности које доприносе: извршавању генерализација (извођење образаца), учењу путем проблемске наставе и моделовању. Обрасце које ученици треба да изведу најпре проналазе путем различитих представа као што су: бројеви, табеле, слике, а потом увиђају да их могу представити посредством променљивих у смислу њиховог комбиновања са рачунским операцијама постепено претапајући их у словне једнакости, једначине и неједначине.

Разматрајући наведена истраживања долазимо до закључка да је и даље могуће креирати нова истраживања, с циљем проналаска адекватних метода које могу допринети најпре успешном разумевању појма, а потом и састављању и решавању једначина и неједначина. Пошто је развијена способност математичког моделовања битан фактор при изналажењу решења једначина и неједначина, а уједно и тенденција савремене васпитно-образовне праксе јасно је да је наша тема *Ефекти проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања* оправдано исказала потребу да се дубље истражи и експериментално провери. Увидом у бројна истраживања и радове наша сазнања потврђују да не постоје целовита истраживања која су спроведена с циљем проучавања проблемске наставе у контексту математичког моделовања.

Предмет овог истраживања односио се на испитивање и проучавање ефеката проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања приликом решавања једначина и неједначина у четвртог разреда основне школе, с намером унапређивања квалитета ученичких знања. Основни циљ је био да се испитају ефекти проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања. Остваривање постављеног циља одвијало се поступно, према фазама које у раду чине засебна поглавља. Кроз даљи текст упознаћемо се са редоследом поглавља, те ћемо објаснити структуру и описати њихов садржај.

Теоријски приступ проблему чини четири поглавља. У првом поглављу описујемо проблемску наставу у почетној настави математике кроз следећа потпоглавља: историјски аспекти проблемске наставе; појмовно одређење проблемске наставе; дидактичко методичке одлике проблемске наставе; реалистично математичко образовање као егземплар савремене примене проблемске наставе; корелација између проблемске наставе и других наставних система. Друго поглавље резервисано је за описивање математичког моделовања, које је објашњено кроз наредна потпоглавља: појам и основне детерминанте математичког моделовања у почетној настави математике; улога и значај математичког моделовања у контексту проблемске наставе; отворени проблеми као средство ефикасног развоја способности математичког моделовања; математичко-кибернетички модели у почетној настави математике; методички аспекти математичког моделовања. Треће поглавље посвећено је алгебарским основама у оквиру кога објашњавамо следећа потпоглавља: историјски развој алгебре; алгебарско мишљење и методички приступ изучавања алгебарских садржаја у коме је посебна пажња посвећена: увођењу појма променљиве; једначинама и неједначинама у почетној настави математике и концепту функционалне зависности. Четврто поглавље одсликавају релевантна досадашња истраживања.

Други део рада усмерен је на описивање експерименталног дела истраживања. *Методолошки приступ проблему* чине поглавља у којима дефинишемо проблем и предмет, циљ и задатке, хипотезе, методе, технике и инструменте истраживања и варијабле. Засебне целине представљају опис карактеристика узорка истраживања, истраживачких активности и статистичке обрада података.

Трећи део рада представљају резултати до којих смо дошли у истраживању, њихова анализа, као и методичке импликације и закључци настали као производ добијених резултата. *Резултати и анализа истраживања* обухватају седам поглавља. Најпре представљамо фундаменталне карактеристике спроведеног истраживања које допуњујемо табеларним приказима дескриптивних карактеристика за све променљиве, а потом дајемо табеларни приказ дескриптивних статистика експерименталне групе с једне, и контроле групе с друге стране. Прво, друго и треће поглавље редом чине интерпретација и анализа резултата иницијалног, првог финалног и другог финалног мерења. Структура другог поглавља саткана је од три потпоглавља, која се редом односе на анализу резултата у вези са способностима моделовања ученика приликом разумевања и решавања једноставних једначина и неједначина, потом сложених једначина и неједначина и на крају представљени су добијени резултати који показују колико су ученици оспособљени да састављају адекватан текст на основу задатих иконичких и симболичких представа. Четврто поглавље је резервисано за целокупно сумирање резултата за сва три извршена мерења (иницијално, прво и друго финално) и чиниће га кратак осврт на компаративну анализу и корелацију свих наведених мерења. Пето поглавље искористило смо у сврху анализе и интерпретације најчешћих грешака које су ученици правили на тестовима знања. Пошто смо испитивали мишљење и ставове ученика путем интервјуа у вези са имплементацијом проблемске наставе на часу математике, добијени резултати биће садржани и анализирани у шестом поглављу. Најзад, седмо поглавље карактерисаће описивање запажених активности ученика на часу проблемске наставе које је јасна представа циљаног посматрања ученика у току експерименталног програма. Приликом представљања и анализирања добијених резултата осим табеларних приказа, њихова потпунија и јаснија слика остварена је и помоћу линијских и стубичних дијаграма.

Импликације и закључци чине два поглавља. У првом поглављу представљени су релевантни предлози са методичког аспекта који се темеље на добијеним резултатима спроведеног истраживања. Друго поглавље одликују завршна разматрања преточена у закључке које смо извели бавећи се проблематиком овог рада. У овом поглављу смо на основу добијених чињеница представили и нову информацију до које смо дошли истраживањем.

Проблем овог истраживања у ширем смислу конструисан је кроз испитивање ефеката проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања приликом решавања једначина и неједначина у четвртог разреда основне школе и сагледавање утицаја уведеног модела на тематске области изван наведених. Можемо констатовати да је овај проблем актуелан с аспекта теоријског, практичног и друштвеног значаја. Теоријски значај огледа се у тежњи за увођењем иновативних модела у наставни процес који доприноси остваривању услова за стицање квалитетних, функционалних, ефикасних и трајних знања. Практични значај заснован је на организацији и имплементацији наставе у којој ће доминирати модел проблемске наставе. Друштвени значај своју улогу проналази у потреби и залагању савременог друштва за целоживотно образовање ученика које подразумева васпитавање личности у смислу: самосталног приступа проблемима, сагледавању проблема са различитих становишта и осмишљавању релевантних стратегија које ће осветлити пут до њиховог решења. Подстицање и реорганизација мисаоних процеса ученика такође је део друштвеног значаја, који подржава чињеницу да је ученике потребно одвојити од шаблонског начина размишљања и навести их да негују критичко и стваралачко мишљење.

I ТЕОРИЈСКИ ПРИСТУП ПРОБЛЕМУ

1. Проблемска настава у почетној настави математике

Настава у многим школама и даље је заснована на традиционалном приступу и принципу рада. Међутим питање које се све више разматра и које заокупља пажњу многих истраживача у вези је са променама у образовању, где се тежи побољшавању наставе и њених сегмената.

Модел традиционалне наставе заснива се на процесу преношења знања, умења, вештина и навика у коме је основни преносилац информација наставник, док ученици у том наставном процесу заузимају положај пасивних слушаца. Сматра се да је овакав вид предавачке наставе неадекватан за целокупан развој личности ученика, те га је неопходно променити. Промене које су окупирале традиционалну наставу имају за циљ да повећају целокупну активност ученика и ефикасност приликом усвајања знања. Превазилажење слабости предавачке наставе условиле су настанак и развој нових концепција школског учења. Једна од тих концепција која се уједно показала и као најбоља јесте проблемска настава. Компетенције које ученици треба да поседују у образовном систему у 21. веку у вези су са развојем способности које су одговорене за изналажење адекватних стратегија у решавању проблема (Kurniawan, 2016). Као базне способности у том процесу наводе се стваралачки и критички начин размишљања с једне стране, односно пружање подршке когнитивном развоју, с друге стране (Birgili, 2015; Hidayah et al., 2017).

Према Брунеровој (1976) концепцији настава треба да буде организована тако да подстиче когнитивни развој ученика те да их наводи да изграђују нова знања и да их интегришу са постојећим, већ стеченим знањима. Такође он заступа став да настава може имати велики удео у интелектуалном развоју ученика само ако се преферирају различите методе и нивои стицања знања, односно решавање проблема и учење путем открића (Вилотијевић, 1996). Спровођење проблемске наставе значајно је не само на когнитивном већ и на психомоторном и афективном становишту (Chang et al., 2017).

Проблемска настава у почетној настави математике представља модел наставе који ученика ставља у први план, захтева од њега да самостално истражује, разматра и предлаже алгоритме доласка до решења постављеног проблема уз уважавање његових могућности, склоности и способности. С тим у вези можемо констатовати да проблемска настава задовољава све захтеве које намеће индивидуализација наставног процеса (Јанковић, 2016). С обзиром на ефекте које проблемска настава остварује, неопходност њене примене у почетној настави математике је оправдана. Водећи се идејама Ничковића (1971) који проблемску наставу посматра као високо активирајући метод, можемо рећи да проблемска настава у почетној настави математике код ученика утиче на:

1. буђење интересовања за наставу и подстицање мотивације;
2. развој васпитних вредности (истрајност, упорност, систематичност, иницијативност, такмичарски дух, сналажљивост итд.);
3. развој стратегија за решавање одређених проблема и коришћење различитих техника учења;

4. развој различитих врста мишљења (апстрактног, критичког, логичког, стваралачког), те делује на развој способности трансформације претходно стечених знања и примене истих у новонасталим ситуацијама.
5. подстицај и коришћење различитих мисаоних операција (анализа, синтеза, апстракција, генерализација, компарација, идентификација, диференцијација).
6. стицање основне математичке културе неопходне за примену математике у различитим људским делатностима, односно позитивно делује на развој способности математичког моделовања;
7. пружање доприноса свестраном развоју личности ученика и обучавање ученика за коришћење разноврсних доступних извора знања.

Када све до сада речено сагледамо, јасно је да проблемска настава доприноси подизању квалитета и ефикасности наставног процеса, те потпуно одговара захтевима савременог образовања и васпитања који се темеље на стављању ученика у позицију активног учесника у том процесу¹. Вилотијевић (2001) јасно истиче да је основни циљ проблемске наставе да „данашњу школу изведе на виши ниво од стицања знања ка развоју ученичких стваралачких способности, што значи да наставни процес треба да буде процес мисаоне активности ученика. У њој суштински мора да се измени и улога наставника који би требало да буде не испоручилац готових знања и решења, него сарадник и организатор такве наставе у којој ће ученици самостално решавати проблеме и тако развијати своје апстрактно мишљење и укупне менталне капацитете“ (стр. 216). Томић и Осмић (2006) наводе да је основни циљ проблемске наставе стицање трајних знања која ће ученици примењивати у новим околностима, као и развој стваралачког мишљења. Савремено схватање заступа теорију која инсистира на активној и стваралачкој примени знања, конкретније речено, захтева од ученика развој активности, способности и навика које имају круцијелну позицију у стваралачкој примени знања при решавању нових задатака и проблема (Зверова, 1980).

Проблемска настава код ученика развија искуство за решавање комплексних проблема и трансформацију истих из реалног у математички свет и обрнуто. Овај наставни систем дизајниран је тако да омогући ученицима следеће (Hmelo-Silver, 2004):

- (1) изградњу свеобухватне и флексибине базе знања,
- (2) развој адекватних стратегија неопходних за решавање проблема,
- (3) подстицај за целоживотно учење,
- (4) развој вештина комуникације и
- (5) мотивацију за учење.

Правилник о програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања (2018) који се примењује од школске 2019/2020. године истиче да је примарни циљ основног образовања и васпитања заправо „развијање компетенција за сналажење и активно учешће у савременом друштву које се мења“, као и „развијање кључних компетенција за целоживотно учење, развијање међупредметних компетенција за потребе савремене науке и технологије“ (стр. 47). Као што видимо и у фокусу будућег још савременијег образовања истакнуте су компетенције које је могуће подстаћи путем проблемске наставе.

¹ Целокупан позитиван ефекат овог наставног система Брунер (Bruner, 1961) је приказао кроз четири подручја, а реч је о: напредовању и повећању интелектуалних моћи ученика, подстицању унутрашње мотивације, развоју, унапређењу и надоградњи технике откривања и трајности стечених знања.

Милијевић (2003) наглашава да спровођење проблемске наставе осим што повећава ефикасност васпитно-образовног рада, метод је сигурног подстицаја и развоја менталних способности ученика и апстрактног мишљења, потом, од посебног је значаја за ставарање везе између ученика и различитих техника учења, док не смемо изоставити и њену кључну улогу коју има у процесу индивидуализације и унапређењу мотивације.

Матијевић и Радовановић (2011) такође подржавају став да проблемска настава има изразито мотивишућу улогу на ученика. Проблемска настава чини једну адекватну стратегију уз помоћ које се може успешно организовати час математике јер пажњу ученика мапира на решавање проблема, пружа ученицима различите могућности за употребу и развој критичког мишљења, поспешује њихов кооперативни однос са вршњацима и допушта им излагање сопствених креативних идеја (Krutik & Rudnick, 1999;). Проблемска настава у почетној настави математике оствариће своје најефикасније дејство уколико њени покретачи буду идеје засноване на елементима свакодневног живота (Baron et al., 2008).

Проблемска настава је своју најширу примену пронашла у настави математике, међутим треба узети у обзир и чињеницу да поједини математички садржаји нису погодни за спровођење овог наставног система, тако да се у том случају наставник увек може одредити за неку другу наставну методу кроз коју може прожети и елементе проблемске наставе.

1.1. Историјски аспекти проблемске наставе

Историјски развој проблемске наставе темељи се на откривању научних истина („еурека“) од стране Архимеда помоћу хеуристичког разговора. Даље, његовим стопама крећу Сократ и Платон који су дијалогским разговорима наводили саговорника да се суочи са тешкоћама и усмеравали га да нађе прави пут који ће га довести до одговора. Затим, XVI век је обележио Коменски конструкцијом новог васпитно-образовног система у коме је старе методе учења заменио новим методама учења у природи, користећи разноврсне слике и предмете уз помоћ којих је ученике подстицао на размишљање и развој мисаоних способности (Арсич, 1995). Почетак проблемског учења почива и на теоријама римских и античких теоретичара. Квинтилијан, који је био римски учитељ, истиче да се основни циљ наставе огледа у томе да ученику једног дана не буде неопходан учитељ. Дакле, залаже се за самообразовање ученика и развој способности које ће ученику помоћи да самостално изгради стратегије и реши проблеме пред којима се нађе. Његов главни став био је поставити ученицима неколико питања, на које ће у складу са својим способностима и могућности одговарати, без туђе помоћи. Прве претпоставке и основе проблемског учења потичу од француског критичара, филозофа и педагога Мишела де Монтења (Michel Eyquem de Montaigne, 1533 – 1592) који је сматрао да ученик треба да буде у позицији у којој посматра, упоређује и разликује ствари (Думбовић, 2005).

Свођење наставног процеса на круто преношење знања ученицима није више у домену савремених схватања, време данашњице захтева оспособити ученике да развијају стратегије и алгоритме за решавање проблема са којим се сусрећу. У складу са реченим поставља се питање: „На који начин то постићи?“. Курник (2002) разматра ово питање и даје најадекватнији одговор, где предлаже посебан наставни систем, односно проблемску наставу.

Идеја о овој настави јавља се почетком XX века и везује се за име познатог америчког филозофа и педагога Џона Дјуија (John Dewey, 1859–1952) и његовог сарадника Вилијама Килпатрика (William Heard Kilpatrick, 1871-1965) који проблемску наставу први пут спомињу у својој „пројект-методи“ која је имала за циљ самостално бирање стратегија од стране ученика, које се користе при решавању постављених проблема. „Пројект-метода“ убрзо је модификована у „проблем-методу“ 1932. године, међутим проблемска настава је призната као дидактички наставни систем тек 1965. године, која се уједно сматра и годином њеног утемељења на тлу Америке (Дјуи, 1970). Теорија Џона Дјуија заснована је на идеји да се свако искуство стиче путем индивидулане делатности помоћу које се може извршити провера базног знања (Шпановић, 2008). Он је сматрао да дете треба најпре оспособити да се снађе у друштву коме припада и свету који га окружује, односно детету треба предочити комплексност реалног живота и подстицати га да решава проблеме на које наилази у њему. Према мишљењу Џона Дјуија учење путем решавања проблема један од највиших облика учења, те као такво пожељно га је подстицати кад год је то могуће (Tanner, 1988).

Амерички психолог Роберт Гање (Robert Gagné) бавећи се когнитивним развојем личности у првом плану је увек истицао значај учења, говорећи да учење поседује јаку моћ деловања на интелектуални развој. Учење путем решавања проблема за њега је такође представљало највиши ранг учења које је у великој мери доприносило развоју стваралачког мишљења (Ђорђевић, 1981). Гање је поистовећивао учење путем решавања проблема и учење путем открића, с тим у вези посебан акценат је ставио на ниво управљања учењем. Дакле, пошто се решење постављеног проблема открива, а учење трансформише у решавање проблема, од великог је значаја управљање учењем (од стране наставника) свести на минимални ниво или га у потпуности елиминисати (Милановић, 1988). Веза између проблемске наставе и учења путем открића огледа се у заједничкој фази која их одликује, а реч је о етапи „решавања проблема“ (Terhart, 2001).

Квашчев (1978) је говорио о настави путем решавања проблема у смислу остварења што бољих постигнућа ученика. Дакле, експерименти које је спроводио са ученицима имали су за циљ да вежбају развој критичког и стваралачког мишљења, резултати које је добијао показивали су да настава путем решавања проблема има велики утицај на постизање квалитетног успеха. Настава путем решавања проблема или проблемска настава посматра се као средство које захтева максималну активизацију ученика у смислу примене и повезивања процедуралних и концептуалних знања неопходних за разумевање и разграђивање почетних проблемских ситуација (Tuminaro & Redish, 2007). Велику подршку зачетку, устаљивању, а касније и развоју проблемске наставе пружила је гештALT теорија која је заснована на реалним дешавањима и ситуацијама у учионици. Заступници ове теорије учење путем решавања проблема посматрали су као процес који је на почетку саткан потпуно неорганизованим елементима, где се потом тежи организацији истих у адекватне целине, а крајњи циљ је решење постављеног проблема (Костић, 2006).

Најзад, проблемска настава у Србији своје место проналази и у уџбеницима дидактике Продановића и Ничковића (1974), а потом код Пољака (1982) и Баковљева (1984). Такође приручник Роксандића (1980) под називом „Проблемска, стваралачка и изборна настава“ пружа значајан допринос утемељењу и развоју проблемске наставе. Последње деценије XX века биле су од великог значаја за развој учења путем кога се могу решавати проблеми у почетној настави математике.

Овакав облик наставе (проблемска настава) у том периоду посматрао се као једна новина у математичком образовању па је из тог разлога био у фокусу интересовања многих истраживача (Lester, 1994).

1.2. Појмовно одређење проблемске наставе

Стратегије савременог образовања захтевају од ученика максимално активирајуће активности, како би се суочили са различитим проблемима, те пронашли исправан пут до њиховог решења. Један од начина организовања процеса учења које подстиче развијање различитих активности ученика и ангажовање сложених мисаоних операција јесте учење путем решавања проблема. У нашем језику и теорији се осим термина *учење путем решавања проблема*, користи и термин *проблемска настава*. Осим споменутих термина неретко се срећу и називи *проблемско развојна настава* и *учење увиђањем*. У руском језику углавном се спомињу појмови *проблемска настава*, *проблемско развојна настава* и *проблемско-хеуристичка метода* (Металскиј, 1989). У немачком језику највише се користе термини *решавања проблема у настави* или *проблемска метода* (Дејић, 1996). Све наведене термине које смо до сада споменули можемо објединити називом *проблемска настава* или *учење (настава) путем решавања проблема*. Терминологија се мења с обзиром на говорно подручје, али суштина и значење остају исти.

Посматрајући проблемску наставу с психолошког становишта овај појам се дефинише различито од стране аутора, с обзиром на то шта аутори у њој сматрају важним одредницама. Сходно разликама које постоје између дефиниција можемо нагласити да су два елемента неизоставна, то су: истраживачка активност и изградња адекватних стратегија које воде до исправног решења (Вилотијевић и Вилотијевић, 2016).

Ђорђевић (1997) сматра да се суштина проблемске наставе „састоји у проблемској ситуацији, самосталном тражењу идеја за њено решавање и у проверавању исправности тих идеја“ (стр. 473). Вилотијевић (1999) говори о два основна елемента проблемске наставе, а то су проблем и проблемска ситуација. Према његовом мишљењу проблем представља нешто што је непознато, односно празнина коју је неопходно допунити или открити руководећи се подацима који нису изричито дати, док проблемску ситуацију посматра као почетно стање заинтересованости и упитности појединца који треба да реши проблем.

Вилотијевић и Вилотијевић (2016) истичу да проблемску наставу „карактерише самостална истраживачка активност кроз коју ученици, савлађујући проблемске тешкоће, проналазе нова решења и тако усвајају научне истине. Настава и учење усмерени су на самостално сазнавање, трајну мотивацију и развој мисаоних способности ученика у раду детерминисаном системом проблемских ситуација“ (стр. 40). Бавећи се проблематиком овог наставног система Симић (2015) га дефинише као „тип наставе у којој ученици самосталним истраживањем и решавањем проблема развијају стваралачко мишљење“ (стр.112).

Милијевић (2003) проблемску наставу посматра као: „најбржи облик учења, мишљења и стваралаштва; постојање потешкоће, непознате ситуације коју треба решити; ученик врши избор и след мисаоних операција; проблем се решава усмереном и свесном активношћу сваког ученика, тј. увиђањем односа између датог и задатог; путем проблемске наставе ученици се оспособљавају за самостални истраживачки рад који је стваралачког карактера“ (стр. 373).

С друге стране „проблемска настава представља и облик индивидуализоване наставе, при чему се индивидуализује самостална истраживачка активност ученика и проналажење нових решења, а то значи усвајање научних истина“ (Јанковић, 2016: 365). Као што видимо свака дефиниција проблемске наставе садржи суштину која је иста, а огледа се у самосталном истраживању ученика и повећаној мисаоној активацији која упућује на надградњу стваралачког и критичког мишљења.

Целокупан наставни процес треба ученика да оспособи да самостално мисли, проверава чињенице, тражи различита решења, изводи закључке и да своја стечена знања примењује у практичним ситуацијама (Крстић, 2005). Муминовић (2010) проблемску наставу објашњава као „посебну организациону форму наставе која се реализује на мањим или већим наставним целинама наставног програма чија је логичка структура садржаја такве природе да се може транспоновати за проблемско учење у настави“ (стр. 24).

Пољак (1977) проблемску наставу доживљава као наставни систем у коме ученици откривају нешто што је већ откривено. Другим речима, мисли се на то, да се пред ученике не постављају проблеми чија су решења неоткривена, већ се постављају проблеми који за ученике представљају нешто што је непознато. У том контексту ученик би требало уз помоћ своје самосталне мисаоне активности да разуме и формулише проблем. Рицвек (Rijavec, 2003) истиче да је примена методе откривања, коју иначе поистовећује са проблемском наставом, могућа је у свим предметима. Главна промена је у улози учитеља и огледа се у начину закључивања који се креће од дедуктивног ка индуктивном. Уместо пружања готових знања и информација ученицима, учитељ преузима пасивну улогу те путем разговора наводи ученике да сами закључују и разумеју оно што уче.

Учење путем решавања проблема посматра се као највиши ниво мисаоне активности ученика, те у вези са тим проблемску наставу је неопходно спроводити како на часовима математике тако и у оквиру других наставних предмета, јер је то само један од начина који ће нам помоћи да одговоримо на захтеве савременог образовања (Симић, 2015). Ми ћемо се сложити са оваквим ставом јер учење путем решавања проблема, односно проблемска настава, далеко сеже у остале наставне системе, па је и њихова комбинација врло ефикасна за целокупан наставни систем па и за почетну наставу математике.

1.3. Дидактичко-методичке одлике проблемске наставе

Главни захтев савремене дидактике огледа се у чињеници да је настави потребна одлика истраживачког карактера. Кључни задатак школе јесте да оспособи ученике да усвајају и развијају знања која могу применити у новим и другачијим ситуацијама. У основама методичких вредности проблемске наставе налази се настава чија је улога да ученика оспособи за самосталан и креативан рад, која код ученика подстиче развој мишљења и која га спрема за самообразовање и перманентно образовање (Банђур, 2007).

Пошто проблемска настава, као посебан наставни систем, испољава своју широку примену у почетној настави математике, она као таква оправдано захтева да споменемо и њене дидактичке вредности. Дакле, основне дидактичке одлике ове наставе су:

- повећава ефикасност васпитно-образовног рада;
- убрзан развој менталних способности и психичких функција;

- осигурано је активно учење;
- развијање способности апстрактног мишљења као највише интелектуалне функције;
- развијање самосталности и психичке способности ученика;
- упознавање различитих техника и метода ефикасног учења;
- појачана мотивација;
- побољшање трајности знања;
- развијање критичког и стваралачког мишљења;
- коришћење различитих извора за стицање знања;
- повећана применљивост стечених знања (Стевановић, 1998, стр. 183-184).

Ничковић (1974) такође истиче вишедимензионални карактер овог наставног система када је у питању подручје почетне наставе математике. Тај вишеструки значај обухвата:

- развијање унутрашње и спољашње мотивације и интересовања код ученика;
- васпитни утицај који садржи истицање и неговање личних особина ученика као што су: упорност, истрајност, систематичност, дружељубивост, такмичарски дух, сналажљивост, иницијативност и др.;
- развијање навика и техника које дају подршку самосталном учењу;
- подстицање и развој мишљења (критичко, стваралачко, апстрактно) као и развој способности инвентивног и оригиналног у решавању проблема и изналажења нових могућности приликом решавања проблема;
- развој логичких операција (анализа и синтеза, компарација, диференцијација, идентификација, генерализација итд.).

Када бисмо извршили компаративну анализу дидактичко-методичких одлика проблемске наставе између Ничковића и Стевановића јасно бисмо уочили висок степен корелације. Наведени аутори допуњују један другог и тако образују једну складну листу позитивних ефеката које пружа овај наставни систем.

Проблемском наставом се превазилазе недостаци традиционалне наставе. Механичко памћење које је својствено класичној (традиционалној) настави, замењује се проблемском наставом, која ученицима не пружа готова знања, већ им обезбеђује широк спектар могућности уз помоћ којих до знања долазе самостално (Мирковић, 2006). Основне разлике између традиционалне и проблемске наставе приказане су у сажетој форми у следећој табели.

Табела 1. Разлике између традиционалне и проблемске наставе (Terhart, 2001).

ТРАДИЦИОНАЛНА НАСТАВА	ПРОБЛЕМСКА НАСТАВА
1. Наставник унапред планира наставни час, руководећи се наставним планом и програмом 2. Кораци по којима се час изводи унапред су дефинисани и не излазе из крутих оквира наставног програма, осим ако не постоје изненадне сметње. Преношење наставних садржаја одвија се кроз:	1. Наставник се ослања на интересовања ученика у смислу спровођења неког истраживања или бављења неком другом активности. Наставник користи релевантне методе и поступке којим ученике мотивише за рад.

а) коришћење табле и других аудиовизуелних средстава; б) питања; в) понављање и поткрепљивање. 3. Организацијски облици су планирани. Што би значило да се изводи фронтални, групни или индивидуални облик рада. Евентуално комбинација неких од споменутих облика рада. 4. Вредновње пренесеног знања унапред је увршћено у наставни програм. Оно се одвија на крају наставног часа или наставне јединице. Знање се проверава различитим тестовима, а ученици се оцуњују према стандардима који важе за цео разред.	2. Наставник ученику ставља на располагање различите изворе знања који ће му помоћи да дође до решења постављеног проблема, потом користи различите медије и поставља питања која од деце изазивају напоре да дођу до одговора. Истраживање од стране ученика одвија се према могућностима ученика, а наставник је тај који надгледа, пружа помоћ и контролише рад. 3. Организацијски облик је флексибилан, што значи да су допуштени неформални контакти током наставе. Време се користи флексибилно, сваки ученик наспрам својих могућности. 4. Наставник континуирано вреднује дечји рад и то на индивидуалној основи. Подносе се усмени и писмени извештаји. Квалитет тих извештаја зависи од склоности и развијених способности ученика.
---	--

„Проблемска настава омогућава да се наставник ослони на дечје интересе, јача је мотивација, флексибилнија је, неформални социјални контакти су допуштени, стална је повратна информација, итд.” (Terhart, 2001: 165). Дакле, проблемска настава отклања недостатке традиционалног приступа, а образовање чини ефикаснијим и применљивијим. Два структурална елемента проблемске наставе су проблем и проблемска ситуација. Како бисмо могли да користимо наведене термине (проблем и проблемска ситуација) кроз следећи текст упознаћемо се са основним одликама и карактеристикама истих, те ћемо се боље упознати са дидактичко-методичком структуром проблемске наставе.

1.3.1. Проблемска ситуација, проблем и решавање проблема

Структурални делови проблемске наставе представљени су кроз два сегмента, а реч је о проблемској ситуацији и проблему. Представници традиционалне наставе уводни део часа врло често започињу надовезивањем старог градива на ново, међутим, заступници савременог образовања дали су предлог да настава може почети постављањем проблема који ће ученике навести на размишљање. Краће речено, наставу можемо започети путем добро осмишљене проблемске ситуације (Ничковић, 1971). Ослањајући се на претходно, можемо констатовати да основни смисао проблемске ситуације лежи у мотивационој улози, коју она остварује на ученика.

Дјуи (1970) проблемску ситуацију посматра као стање где се мишљење ученика сусреће са одређеном недоумицом, док је решавање проблема одговоран фактор за развој мишљења, с тим у вези ученике у настави увек треба ставити да се бар сусретну са проблемским ситуацијама и проблемима.

Вилотијевић (1998) проблемску ситуацију дефинише као „стање изненађења, упитности, велике заинтересованости и високе умне и емоционалне напетости појединца који треба да реши задати проблем“ (стр.77). Основни смисао ставрања проблемске ситуације огледа се у следећем:

- потребно је да ученици проблем доживе као нешто непознато,
- важно је да ученици осете противуречност која се кроз проблем прожима,
- неопходно је код ученика подстаћи психичку потребу како би приступили сагледавању и решавању проблема (Пољак, 1977).

Окоњ (Окоњ, 1964) проблемску ситуацију доживљава као изазован задатак, који је ефикасно средство за стварање овакве ситуације, а усмерен је на потребе и могућности ученика. Сврха постављања изазовног задатака огледа се у мотивисању ученика за мисаоне активности које следе, односно за решавање проблема. Окоњ истиче да се пред ученика не сме поставити проблемска ситуација која га приморава да изналази решење, а последица тога је смањење ефикасности учења путем решавања проблема. Ученике не треба приморавати, већ их је потребно мотивисати да реше проблем.

Посматрано са психолошког становишта руски аутор Матјушкин (Матюшкин, 1972) проблемску ситуацију посматра као: потребу која човека наводи на сазнајну делатност, потом, непознату ситуацију којом жели овладати и интелектуалне могућности које се ослањају на претходно знање и искуство човека. Овај руски аутор наводи шест важних етапа које треба испоштовати при стварању проблемске ситуације: (1) Стварање проблемске ситуације огледа се у задавању практичних или теоријских задатака, чије ће коришћење захтевати откривање нових знања и овладавање новим вештинама од стране ученика; (2) Приликом постављања проблема обавезно водити рачуна о интелектуалним способностима ученика; (3) Циљ увек поставити пре почетка решавања проблема; (4) Проблем манифестовати кроз различите облике у виду питања или неких практичних активности; (5) Иста проблемска ситуација може се узроковати различитим проблемима; (6) Потребно је поставити проблемску ситуацију која ће код ученика изазвати одређени немир и тежњу за решавањем проблема.

Када говоримо о природи проблема и проблемске ситуације Првановић (1974) наводи: „Ставити ученика пред проблем значи дати извесне податке и поставити одређени циљ који он треба, користећи те податке, да постигне. Ставити, или довести ученика у проблемску ситуацију, значи омогућити му да `види` неке релације, а њему самом препустити да поставља циљеве, тј. одређене проблеме” (стр. 48). Приликом стварања проблемске ситуације мора се посебно водити рачуна да она буде реална, занимљива, интересантна и релевантна предстојећем проблему.

Приликом стварања и дефинисања проблемске ситуације наставник може користити четири начина да то и уради, о којима говори Курник (2002): (1) прецизно и концизно постављање проблема; (2) стварање ситуације која захтева од ученика да самостално уоче и дефинишу проблем који је представља; (3) стварање ситуације са потпуно или делимично назначеним проблемом који током процеса решавања доводи ученике до новозамишљеног проблема од стране наставника; (4) стварање ситуације са потпуно или делимично назначеним проблемом који током процеса решавања доводи ученике до проблема који раније није био у плану и замисли наставника.

Ставови Кадума (2005) када је у питању улога наставника у проблемској ситуацији слични су ставовима Курника, и гласе:

- „учитељ јасно и прецизно поставља проблемски задатак ученицима и ствара ситуацију у којој се тражи од ученика да сами схвате и формирају проблем који се у тој ситуацији налази;
- учитељ ствара ситуацију с више или мање назначеним проблемима који током анализе треба ученика довести до новог проблемског задатка који је он предвидио;
- учитељ ствара ситуацију с више или мање јасно назначеним проблемом који током анализе ученике доводи до новог проблемског задатка који он није у потпуности предвидио“ (стр. 58-59).

Вертхајмер (Werthajmer, 1987) начине стварања проблемских ситуација сврстава у две категорије: прва се односи на постављање проблемских ситуација вербалним путем у којима наставници усмено или коришћењем различитих аудиосредстава ученике уводе у проблем и друга, у којој наставници практично, уз помоћ различитих наставних средстава ученике уводе у проблем.

Да би проблемска ситуација показала своју функционалност потребно је добро познавати претходна искуства ученика и њихову интеракцију у тренутним околностима (Won, 2009). За наставу је добро постављен проблем од велике важности, јер ако се ту направи пропуст ученици неће моћи на адекватан и њима примерен начин да дођу до решења постављеног проблема.

М. И. Махмутов такође даје своје поставке у вези са типовима проблемских ситуација и он говори о:

- „сусрету ученика са животним појавама и чињеницама које траже теоријско објашњење;
- организацији практичног рада ученика;
- покушајима ученика да анализирају животне појаве које одударају од њихових пређашњих представа;
- формулисању хипотеза;
- настојању ученика да упоређују и супротстављају;
- истраживачким задацима“ (Махмутов, према: Вилотијевић и Вилотијевић, 2016, стр. 41).

С обзиром на претходну поделу истичемо да нас посебно занимају проблемске ситуације које наставник може да реализује у почетној настави математике и у том смислу наставу учини ефикасном, а ученике заинтересује и мотивише за предстојећи проблем. Сви наведени типови проблемских ситуација које М. И. Махмутов наводи погодне су и значајне у почетној настави математике.

Теоријско објашњење разноврсних животних појава повезује нас са реалистичним математичким образовањем, потом, практичан рад је такође врло погодан (нпр. различита сецкања, резања, прављење модела и сл.), затим формулисање хипотеза једна је само од етапа успешног решавања проблема. Упоредивање одређених појава, појмова и величина врло често делује мотивишуће на ученике. Међутим, посебно место у почетној настави математике заузимају истраживачки задаци, који у потпуности воде до остваривања постављеног циља. „Многи аутори који су истраживали проблемску ситуацију (коју најчешће ствара наставник) наглашавају њену улогу као средство активизације у васпитно-образовном процесу. Проблемска ситуација која претходи дефинисању проблема (фрагментарно најављује проблем) иницира ученикову интелектуалну активност, покреће стваралачку имагинацију, буди интерес, ствара напетост и мотивише га за истраживачки рад“ (Кајић, 1981: 13-14).

Реч „проблем“ потиче са грчког говорног подручја и представља тешко питање или задатак који треба решити кроз отклањање бројних недоумица. Проблем је „недовршена спознајна структура и због тога код особе суочене с њим ствара немир, напетост и жељу за његовим решавањем“ (Дураковић, 1985, стр. 41). Пољак (1985) проблем посматра као „субјективни доживљај, спознајни и емоционални, што значи да субјект односно човек доживљава проблем. Што је тежина проблема већа, то је његова емоционална структура јача“ (стр.152). Дјуи проблем посматра као све оно на шта се мишљење спотакне. Другим речима, човек да би решио проблем мора да мисли, јер ако почне да мисли он је на добром путу да реши проблем (Erden & Akman, 1998). „Проблем је присутан у свим оним ситуацијама учења и мишљења у којима се јавља недовољност претходног искуства за решавање настале тешкоће, изазване постојањем непознатог и неизвесног и потреба тог искуства, модификовања и интегрисања раније научених одговора у циљу решавања нове ситуације. (...) нема проблема ако је у њему све познато, или ако решење представља препознавање и репродукцију раније стечених знања. Мишљење путем решавања проблема остварује своју иманентну функцију реактивности“ (Ничковић, 1968: 47).

За Данкера (Dunker, 1945) проблем настаје у моменту када појединац постави себи замишљени циљ, али није у могућности да изнађе начин помоћу кога тај циљ може остварити. Раздаљина који се налази између постављеног и оствареног циља, представља проблемски простор који садржи неколико парцијалних циљева које је такође потребно испунити ангажовањем вишеструких мисаоних активности од стране ученика (Anderson, 2005). Према Роту (1978) о проблему говоримо у свакој ситуацији када нам је познат циљ који треба да остваримо, а није нам познат пут и начин на који ћемо доћи до тог циља. Дакле, стратегија доласка до решења неког проблема или такозваног циља представља најзначајнију компоненту проблема.

Сваки проблем у својој структури треба да садржи елементе одређених реалистичних ситуација, које су блиске ученицима и имају везе са њиховим искуствима. Сваки, унапред смишљен проблем од стране наставника за ученике представља нешто што им је наметнуто, те у таквим околностима проблемска настава остаје у сенци, а развој ученика стагнира (Дјуи, 1970). Дејић и Егерић (2003) наглашавају да сваки проблем садржи одређену врсту и степен тешкоће и препреке коју је потребно савладати. Пољак (1989) проблем доживљава као контраверзију између неког субјекта и објекта. Према његовој теорији та контраверзност се огледа између:

- „познатог и непознатог,
- датог и задатог,
- откривеног и неоткривеног,

- постигнутог и непостигнутог,
- имплицитног и експлицитног,
- извесног и неизвесног“ (стр.255).

Малиновић и Малиновић-Јовановић (2002) проблем посматрају као све оно што покреће ученикову мисаону активност. Разматрајући појам „проблем“ Вилотијевић (2001) јасно наводи да га треба разликовати од појма „задатак“, јер је задатак много шири и обухватнији. Осим задатака који су проблемског карактера постоје и друге врсте задатака, међу којима су и задаци репродуктивне природе. Међутим, он заступа и став да се карактеристике проблема и задатака донекле подударају. Та сличност подразумева:

- „нешто непознато, нека празнина коју треба открити и попунити на основу података и односа који нису изричито дати;
- једна или више могућности за решавање;
- велика комплексност (за решавање је потребан велики број сложених и логичких операција);
- за решење је потребан стваралачки приступ и искуство;
- решењем проблема продубљује се знање, усвајају нове структуре, сазнања и развијају менталне способности“ (стр. 217).

Шонфелд (Schoenfeld, 1992) када говори о задацима проблемске природе настоји да истакне, да задаци чије решавање захтева примену познатих стратегија не треба изједначавати са проблемским, те такву врсту задатака назива задацима вежбања. Дејић (1996) се слаже са мишљењем Вилотијевића и наглашава да проблем треба сагледати одвојено од задатка, односно та два термина не треба поистовећивати. „Задаци који се решавају применом познатих поступака и готових формула и односе се на менталне активности које не укључују тешкоће и нове ситуације нису проблеми“ (стр.80). Дејић и Егерић (2010) напомињу да „у наставном процесу под задатком може да се подразумева делатност испуњавања одређених захтева које наставник упућује ученицима“ (стр. 246). Такође, важно је истаћи да захтеве осим наставника, могу упућивати и ученици један другом или самом себи.

Малиновић и Малиновић-Јовановић (2002) на проблем гледају као на врсту сазнајног задатка који покреће мисаону активност ученика, а одликују га различите стратегије решавања као и присутност нечега новог и непознатог у њему. „У пракси се најчешће говори о проблему у ужем смислу, који у математици називамо проблемски задатак. Он је најчешће практичне природе, садржи одређене податке и има постављен циљ. Дакле, проблем је задатак чије су основне одреднице: стварање проблемске ситуације, формулисање проблема и решавање проблема“ (стр.68). Неки аутори констатују да „нешто непознато чини задатак проблемом. Тиме се означава да између циља и услова да се он оствари постоји несклад. Нема неких елемената (података) неопходних за решавање па ученик не може да реши задатак на устаљен начин већ мора да тражи неки нови пут ослањајући се на стваралачко мишљење.“ У овом смислу код ученика долази до подстицања мисаоних операција посредством проблемских ситуација, те ученик моделује умне процесе (Вилотијевић и Вилотијевић, 2016: 40). Да би задатак био проблем за његово решавање није довољна само примена постојећих знања. Подаци који недостају указују на идеју решавања и тако задатак чине стваралачким и претапају га у проблем (Разумовский, 2004).

Пошто не постоји консензус када је у питању дефиниција проблема, ми ћемо се сложити са Купусијевичем (1976) и његовом дефиницијом проблема, према коме је „проблем тешкоћа теоријског или практичног карактера која изазива истраживачки став субјекта и доводи га до обогаћивања знања које субјект до тада није имао“ (стр. 81). Посматрано из наше перспективе проблем одликује вишенаменска димензија у оквиру које се посебно истиче „мост“ који проблем гради између математичких садржаја и реалног света.

Типови и критеријуми расподеле проблема су различити. Нека најједноставнија подела проблема заснована је на односу између почетне (проблемске) ситуације и ситуације циља, и ту говоримо о:

- проблемима интерполације (познате су почетне ситуације и ситуације циља, а проблем се решава увиђањем веза између ова два подручја) и
- проблемима екстраполације који се представљају у три облика: (1) проблеми у којима су познате чињенице почетне ситуације; (2) проблеми у којима је познат само циљ; (3) проблеми у којима је непозната и почетна ситуација и циљ (Симић, 2015).

Даља расподела проблема може бити извршена с обзиром на начин њиховог решавања, и ту спадају: они проблеми који захтевају прикупљање чињеница, потом, проблеми с присећањем решења и проблеми с објашњењем ситуација (Geer, 1966). С обзиром на то колико је ученику познат поступак и начин решавања проблема, проблеми се групишу у две категорије: „рутинске и нерутинске проблеме“. Прву категорију, такозваних рутинских проблема, одликују они проблеми чија је стратегија решавања ученику позната од раније. Односно, при решавању рутинских проблема ученик тачно зна који алгоритам треба применити да би се задати проблем решио. Другу категорију, нерутинских проблема, одликује ситуација у којој ученик није упознат са методом и поступком његовог решавања. Контекст ових проблема саткан је чињеницом да поступак који води до решења није очигледан, па ученици морају извршити организацију и класификацију његових парцијалних делова, а потом сагледати релације које владају између тих делова. Ова врста проблема има велики значај у почетној настави математике јер представља велики изазов за ученике и наводи их на разматрање различитих метода и поступака (стратегија) који их могу довести до исправног решења (Mayer & Wittrock, 1996: 48). Склоп нерутинских проблема чине информације које ученици морају најпре разумети, а потом и уочити везе и односе које владају међу њима. Даље, ученици се морају присетити процедуралног знања неопходног за решавање постављеног проблема, а затим и осмислити план, спровести га и доћи до крајњег циља који подразумева изналажење тачног решења (Lee et al., 2014). Битно је напоменути да се и у оквиру нерутинских проблема ученик наслања на своја претходна знања и искуства која му помажу да осмисли нове начине и путеве решавања. Нова стратегија представља корелацију између раније стечених знања и идеја које му осветљавају пут до новог знања. Другим речима, нерутински проблеми, садрже и елементе рутине (Schloeglmann, 2004).

За Франдесена (Frandsen, према: Арсић, 1995) решавање проблема је „дириговани циљ с вишеструким „покушај-погрешка“ прилазом новим ситуацијама и задацима у којима индивидуа открива начине за одговоре“ (стр. 23). Малиновић-Јовановић и Малиновић (2013) истичу да решавање проблема представља проналажење непознатог. С тим у вези прво је неопходно уочити и идентификовати познате податке, а потом пронаћи непознате елементе и све оно што не достаје, а има важну улогу у решавању проблема.

Амерички психолог Роберт Гаџетт сматра да је решавање проблема најефикаснији начин развијања стваралачког мишљења и придаје му велику пажњу тако што га поставља у сам врх типова учења. Бавећи се когнитивним развојем личности и одликама учења он истиче да су „проблеми врхунски тип учења у хијерархији која се креће од најједноставнијих условљавања преко учења појмова и начела до самог решавања проблема“ (Ђорђевић, 1981, стр.73).

„Решавање проблема је највиши облик учења које карактерише увиђање односа између средстава, начина и путева, с једне, и циља односно решења задатака, с друге стране, и сналажење у новој ситуацији учења“ (Стевановић, према: Ничковић, 1970: 357).

Према Рубинштајну (1981) етапе приликом решавања проблема огледају се кроз: уочавање проблемске ситуације; решавању проблема и у практичној примени добијених резултата. Кликс (Klix, 1971) на поступак решавања проблема гледа као на кретање од неког одређеног почетног стања па до циља. Међутим, уколико се на том путу нађе било какава препрека, она ће онемогућити директан прелаз из стања почетка у стање циља. С тим у вези ученик ће морати да уложи одређени мисаони напор како се не би спотакао на постојећу баријеру и тако омогући себи долазак до жељеног циља. Холандски истраживач Ван де Гир (Van de Geer, 1966) говори о томе да поступак решавања проблема никада не тече праволинијски, већ осцилује и захтева прикупљање чињеница, присећање и објашњавање. Килпатрик са сарадницима (Kilpatrick et al., 2001) истиче да је развијање способности за решавање проблема врло значајно у сваком тематском оквиру математике јер обезбеђује различите могућности решавања нових проблема, тачније „практиковање научених вештина“ (стр.420). Пољак (1977) јасно приказује четири етапе које су својствене решавању проблема:

- “интензивно размишљање о прикупљеним подацима и њиховој комбинаторици,
- снага конструктивне маште,
- динамична емоционална узбуђеност и
- техника интелектуалног рада” (стр. 255).

Сентрок (Santrock, 2012) такође говори о фазама кроз које се одређени проблем може решити, а то су:

- разумевање постављеног проблема;
- изградња адекватних стратегија за решавање проблема;
- изналажење решења;
- редефиниција проблема и
- решавање нових проблема.

Као што видимо постоје евидентне сличности између етапа у решавању проблема код Пољака и Сентрока, етапе се код оба наведена аутора углавном преклапају проналазећи се једна у другој или допуњујући једна другу. Пољак говори о етапи конструктивне маште, док Сентрок ту подразумева изградњу адекватних стратегија за решавање проблема, заиста да би дошли до идеје којим путем кренути, односно коју стратегију развити неопходно је употребити креативан начин размишљања (машту).

Потом, емоционална узбуђеност свакако може наступити при изналажењу решења или при сазнању да је при решавању употребљен одговарајући алгоритам. Способност решавања проблема према Брудеру (Bruder, 2002) подразумева: овладавање различитим стратегијама за његово решавање, развој мишљења на основу личних рефлексивних и неговање истрајности при доласку до решења (спремност за активан рад).

Процес решавања проблема прате различити мисаони процеси који ученика наводе да изнађу решење постављеног проблема, те тада целокупан поступак пролази кроз три сегмента: а) прихватање и доживљавање проблема од стране ученика; б) блокада ученика, која се јавља када ученик не успева да дође до решења и; в) истраживање нових поступака и метода решавања постављеног проблема (Krulik & Rudnick, 1988).

Пошто се и у даљем тексту бавимо решавањем проблема важно је да истакнемо значај гешталтиста. М. Вертхајмер (1880-1943) наводи да је приликом решавања проблема најбитна реорганизација која се огледа у уочавању нових односа и веза у проблему. Битно је утврдити однос између дела и целине, узрока и последице, и најзад, средства и циља. Према налазима гешталтиста решавање проблема пролази кроз четири мисаоне фазе: (1) препарација- у којој се ученици упознају са проблемом; (2) инкубација- коју карактерише привидан мир; (3) илуминација- други назив за увиђање или фазу у којој се јавља „аха-доживљај“ који представља решење проблема; (4) верификација- фаза коју карактерише проверавање добијеног решења и примена стечених знања у новим проблемским ситуацијама. Према оваквом процесу решавања проблема ученици користе операције груписања, реорганизације, редеоинасања, регруписања и сл., а све у циљу да открију унутрашње везе и односе и утичу на промене у ситуацији које воде до коначног решења (Вилотијевић, 1999). Како би се постављени проблем успешно решио потребно је испоштовати следећа усмерења: (1) ученик се најпре мора ослонити на своја претходна искуства и присетити се претходно наученог што је у вези са задатим проблемом; (2) приликом решавања проблема ученик мора себи учинити доступним све претхоно научено неопходно за изналажење решења датог проблема; (3) одржавање добре комуникације са ученицима може помоћи ученику да размишља на различите начине (Gagné, према: Јукић и сар., 1998).

Решавањем проблема бавили су се Вилотијевић (1998), Ђорђевић (1981) и Петровић (2001), с обзиром да им се теорије решавања проблема и мишљења поклапају, навешћемо четири репрезентативне етапе:

1. Упознавање проблема. То је етапа у којој ученик упознаје елементе од којих је саткана структура задатог проблема, те тежи да уочи њихове међусобне везе и односе.
2. Реформулација проблема. Ову етапу карактерише разјашњавање датог проблема. Након што је уочио познате и задате елементе, ученик приступа разматрању и тражењу свих оних елемената који ће му помоћи да открије оно што је непознато. Тиме је постављени проблем конкретизован и знатно ужи с обзиром на почетно стање.
3. Постављање хипотезе. Основна одлика ове фазе решавања проблема огледа се у постављању хипотезе у којој ученици теже да дођу до резултата. Можемо истаћи да креативност ученика у овој етапи има изразито позитиван ефекат, који води ка решавању проблема.
4. Провера хипотезе. Најзад како би ученик успешно проверио добијене резултате практично, неопходно је да изврши одбацивање непотребних хипотеза, а да усвоји оне релевантне које му помажу да дођу до решења. У томе се огледа значај ове етапе.

Пехконен (Pehkonen, 1997: 64) истиче да се решавању проблема у почетној настави математике придаје велика важност, те с тим у вези наводи четири аспекта зашто је битно овладати овим поступком: „(1) решавање проблема развија основне когнитивне способности; (2) решавање проблема утиче на развој креативности; (3) решавање проблема је део процеса примене математике; (4) решавање проблема мотивише ученике за учење математике“.

Новотна (Novotná, 1997) указује на следеће етапе решавања проблема када је у питању почетна настава математике:

- етапа шифровања, односно размивање задатка;
- етапа трансформисања или другим речима пребацивање у подручје математике;
- етапа рачунања, која заступа решавање проблема у математичком контексту;
- етапа складиштења која подразумева враћање математичког резултата поново у текст.

Видимо да се етапе у решавању проблема несметано преплићу и подударају код свих наведених аутора, разлика је само у броју етапа док је суштина углавном иста.

Своје виђење о решавању проблема Ничковић (1971) даје кроз два сегмента, где се први огледа у постојању тешкоће у новим ситуацијама које прате везе између познатог и непознатог, док је други сегмент базиран на свесној, усмереној, стваралачкој и што самосталнијој активности уз помоћ које ученик посредством уочавања односа између датог и задатог и проналажењем нових путева решења, усвоја нова знања и ствара нове генерализације које имају примену у новим ситуацијама учења². Откривање и долажење до нечег новог посматра се уз помоћ односа који владају између делова и целине, откривањем нових веза, односно попуњавањем празнина које се налазе у проблемској ситуацији (Гајић, 2004). Ученицима који не могу да се снају при решавању одређених проблема наставник може пружити одговарајући вид и степен подршке у смислу да их мотивише и подстакне на размишљање, не откривајући у потпуности алгоритме који воде до конкретног решења (Ђорђевић, 1997). Добра организација и реорганизација постојећих знања са сврхом примене тих знања у новим проблемима део су адекватних поступака и метода уз помоћ којих би наставник унапредио могућности и способности ученика при решавању проблема (Turns & Van Meter, 2011).

Да би процес решавања проблема текао без препрека потребно је да наставник прихвати разноврсне идеје ученика које учествују у изградњи стратегије решавања, а самим тим допусти развој стваралачког мишљења ученика. Сходно томе можемо закључити да је комуникација која влада између наставника и ученика у проблемској настави од великог значаја за целокупан процес учења (Sternberg & Williams, према: Колудровић и Рејић-Ерцеговац, 2010).

Пошто је стваралачки приступ ученика задатом проблему веома важан, у том контексту наставник мора ученицима пружити мотивацину подршку и подстаћи их на истраживачке активности. Подстицај од стране наставника огледа се у пружању додатних упутстава ученика како ће да истражују, како да проблем рашчлани на његове делове, односно како да уоче узрочно-последичне везе које владају између делова проблема и проблема у целини (Gallagher, 2015).

Према Пољиној замисли алгоритам који води до решавања математичких проблема представљен је следећом табелом и повезан је са процесом спровођења проблемске наставе, о чему ће бити речи касније:

² Ђорђевић (1981) заступа исти став и концизно наводи да је решавање проблема „стваралачка активност којом се у сусрету са посебним захтевима тражи откривање нових решења“ (стр. 185).

Табела 2. Алгоритам решавања математичких проблема (Polya, према: Андрић и сар., 2016: 4-5)

ПРВО	РАЗУМЕВАЊЕ ЗАДАТКА
ТРЕБА ДА РАЗУМЕШ ЗАДАТАК	-Шта је непознато?
	-Шта је задато?
	-Како гласи услов?
	-Да ли је могуће задовољити услов? Да ли је услов довољан за одређивање непознате? Или није довољан?
ДРУГО	-Нацртај слику! Уведи препознатљиве ознаке!
	-Растави разне делове услова! Можеш ли их записати?
ПРАВЉЕЊЕ ПЛАНА	
ПОТРАЖИ ВЕЗУ ИЗМЕЂУ ЗАДАТОГ И НЕПОЗНАТОГ!	-Да ли си задатак већ видео? Или си исти задатак видео у нешто другачијем облику?
	-Знаш ли неки сродни задатак? Да ли знаш која теорема би ти могла бити од помоћи?
	-Размотри непознату! Покушај да се сетиш неког познатог задатка који садржи исту или сличну непознату!
	-Ево задатка који је сличан твом, а већ је решен! Можеш ли га употребити? Можеш ли применити његов резултат? Можеш ли применити методу којом је тај задатак решен?
АКО СЕ НЕ МОЖЕ НАЋИ НЕПОСРЕДНА ВЕЗА, МОРАЋЕШ ДА РАЗМОТРИШ ПОМОЋНЕ ЗАДАТКЕ.	-Да ли можеш да уведеш неки помоћни елемент који би ти олакшао употребу тог задатка?
	-Можеш ли да другачије формулишеш задатак? Да ли га је могуће изразити на још неки начин? Врати се на дефиниције!
НА КРАЈУ ТРЕБА ДА НАПРАВИШ ПЛАН РЕШАВАЊА.	-Ако не можеш да решиш постављени задатак покушај прво да решиш неки сродан задатак! Можеш ли да се сетиш неког лакшег задатка који му је сличан? Општији задатак? Специфичнији задатак? Аналогни задатак? Можеш ли да решиш део задатка? Задржи само један део услова, а одбаци други део; када је непозната тако одређена како се може мењати? Да ли из датих података можеш извући нешто употребљиво? Да ли можеш да се сетиш неких других података који ти могу помоћи у одређивању непознате? Можеш ли да промениш непознату, или дате податке, или ако треба и једно и друго тако да нова непозната и нови подаци буду међусобно ближи?
ТРЕЋЕ	ПРИМЕНА ПЛАНА
А. ПРИМЕНИ СВОЈ ПЛАН!	Када користиш план решавања, контролиши сваки корак! Можеш ли јасно видети да је корак исправан? Можеш ли доказати да је исправан?
ЧЕТВРТО	ПРОВЕРА
В. ПРОВЕРИ ДОБИЈЕНО РЕШЕЊЕ	Можеш ли проверити резултат?
	Можеш ли резултат извести другачије?
	Можеш ли резултат или поступак употребити на неком другом задатку?

Сеничић и сар. (2017) решавање проблема представљају кроз седам етапа који су својствени сингапурској математици:

1. детаљно читање и анализа постављеног проблема;
2. постављено питање разумљиво прочитати и преписати, уз остављање празног простора за одговор;
3. уочити ко/шта се помиње у датом проблему;
4. нацртати модел који ће помоћи у изналажењу решења;
5. извршити декомпозицију проблема, тј. извршити растављање проблема на делове;
6. исправно извршити рачунање и решити проблем;
7. записивање одговора на постављено питање на почетку у виду смислене реченице.

Не можемо говорити о некој општој и свеобухватној дефиницији која третира решавања проблема у почетној настави математике. Једноставно ћемо прихватити склоп више различитих теоријских одређења када је у питању решавање проблема, јер је и сам појам „проблем“ комплексног карактера. Једноставно, јасна и концизна дефиниција решавања проблема у настави математике никада није доживела своју конкретност од стране експерата који су се бавили разматрањем ове проблематике (Chamberlin, 2010).

Спровођење проблемске наставе код ученика иницира развој различитих стратегија за решавање проблема, што у неком каснијем времену омогућава адекватан трансфер у неким реалним ситуацијама или у свакодневном животу и окружењу ученика (Hung et al., 2009). Када кажемо „трансфер знања“, то ћемо објаснити као способност примене стечених знања (ранијих знања) у неким новим ситуацијама. Трансфер може бити хоризонтални и вертикални. Хоризонтални трансфер огледа се у ситуацији у којој ученик док чита проблем активира своја раније стечена знања и повезује их са новим информацијама који су дате у проблему. Вертикални трансфер подразумева ситуацију у којој ученик не поседује никаква ранија претходна знања која му могу помоћи при решавању проблема, већ при читању проблема ученик врши препознавање ситуације које интуитивно утичу на буђење претходних знања (Rebello et al., 2007).

Решавање проблема, третирано као врло важна област постигнућа први пут је испитано у циклусу PISA 2012 тестовима у електронској форми. Компетенција решавања проблема посматра се као облик мишљења вишег реда, те уједно има и велики трансферни значај. Подстицање и развијање способности неопходних за решавање проблема основа је за будуће учење, професионални и лични развој и опстанак у савременом добу. „Компетенција решавања проблема јесте капацитет појединца да ангажује когнитивне процесе како би разумео и решио проблемску ситуацију где метод решења није одмах очигледан. Она подразумева спремност појединца да се укључи у такву ситуацију како би развио своје потенцијале конструктивног и рефлексивног грађанина“. У PISA 2012 истраживању решавање проблема подразумевало је способност ученика да пронађу решења у вези са проблемским ситуацијама из свакодневног живота, које су нове за ученике и за које ученици нису раније припремљени да их реше. Резултати који су добијени показују да највећи ниво развијености компетенције решавања проблема поседују ученици из Сингапура и Кореје чији је просек поена износио 560, док су ученици из Србије остварили просек од 473 поена. Сличан просек поена са ученицима наше земље имали су и ученици из Шпаније, Словеније и Хрватске. Око 28% ученика из Србије није успело да достигне ниво функционалне писмености у домену решавања проблема.

Међутим, истаћемо и чињеницу да су наши ученици постигли знатно боље резултате од ученика који се образују у Црној Гори и Бугарској (Бабић-Павловић и Бауцал, 2013: 32).

Према TIMSS 2015 истраживању у оквиру подобласти „природни бројеви са нулом“ вршило се испитивање постигнућа ученика у решавању проблема у контексту који укључују мерење, новац и једноставне пропорције. Резултати истраживања показали су низак ниво постигнућа од стране ученика у подручју наведене области. Посматрано процентуално само 47,67% ученика је успело да оствари позитиван резултат. Разлог који је условио овакав резултат огледа се у томе што се ученици врло ретко налазе у ситуацији да математичке проблеме преводе у реалан контекст (Милинковић и сар., 2017).

Ученике кад год је могуће треба подстицати „да користе различите методе решавања проблема, укључујући и визуелно представљање проблемске ситуације (нпр. метод дужи, метод правоугаоника) (Правилник, 2019б:40).

1.3.2. Структура часа проблемске наставе

Имплементација часа проблемске наставе представља велики изазов како за наставнике, тако и за ученике. Артикулација часа проблемске наставе захтева појачане напоре са становишта организације, од стране наставника, а од стране ученика захтева максимално активирање мисаоних активности и способности. Да би се успешно организовао час проблемске наставе неопходно је испоштовати многе факторе који на то утичу. Дакле, мора се водити рачуна о природи градива, претходним знањима ученика као и о искуствима ученика у решавању проблема. Бавећи се овим проблемом Пољак наводи три етапе које су важне при извођењу часа проблемске наставе:

1. „стварање проблемске ситуације,
2. решавање проблема и
3. контролисање и проверавање” (1989, стр. 255).

Већина истраживача (Дејић, 1996; Вилотијевић, 1999; Петровић, 2001) наводи шесет етапа које треба спровести у оквиру проблемске наставе:

1. стварање проблемске ситуације и формулисање проблема,
2. формирање хипотеза,
3. декомпозиција проблема,
4. решавање проблема,
5. анализа резултата, извођење закључака и генерализација, и
6. практична примена нових знања.

Јасно је да када бисмо успоставили паралелу између етапа које је потребно спровести на часу проблемске наставе, које предлаже Пољак и етапа које предлажу Дејић, Вилотијевић и Петровић могуће је констатовати да су етапе у основи исте, с тим што се у оквиру наведених шест етапа споменутих аутора, налазе разрађене Пољакове три етапе. С наше тачке гледишта определићемо се за шестокомпонентну структуру часа проблемске наставе, односно за шест наведених етапа реализације проблемске наставе које су својствене наведеној групи аутора.

С тим у вези у даљем тескту објаснићемо појединачно сваку од шест наведених етапа, јер разумевање поступака реализације сваке етапе има кључни значај за постизање жељеног циља.

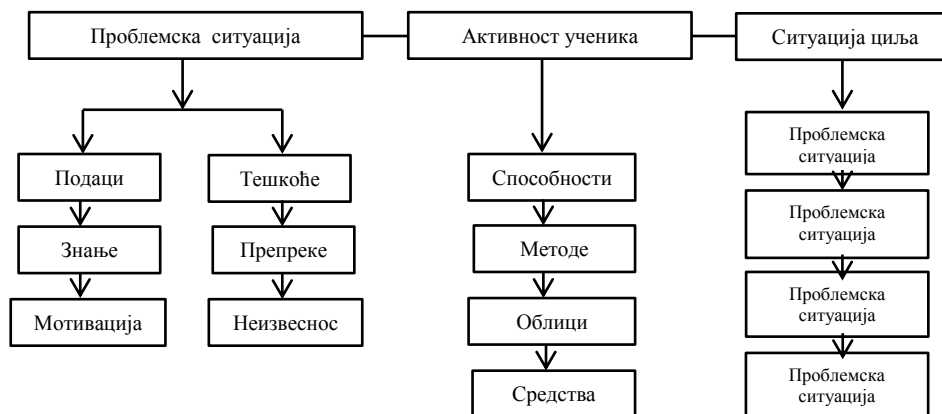
Прва наведена етапа подразумева ослањање на постојећа знања ученика и захтева уочавање постављених услова. У овој фази наставник ствара проблемску ситуацију постављањем питања (проблема), које ученике треба да наведу да изађу из стереотипног начина размишљања и уложи одређени мисаони напор како би изградили стратегије које ће их довести до решења (Ничковић, 1970). Наставник у овој фази има подстицајно дејство у смислу пружања минималне помоћи ученицима, како би ученици трагали за решењем и направили адекватан избор хипотеза. Врло је битно да ученици најпре добро разумеју постављену проблемску ситуацију, јер различити ученици ће исту проблемску ситуацију схватити на другачије начине. Неки ће одмах уочити проблем, док ће неки увидети присуство проблема кроз различите контексте, а постоје и они који уопште неће увидети постојање проблема (Shuell, 1990). С тим у вези можемо истаћи мисао Рубинштајна који наводи да “права одлика човека који мисли — јесте способност или умешност да види или уочи проблем тамо где он постоји” (Рубинштајн, према: Заботин, 1971: 415). Степен у ком ће ученици разумети постављени проблеми условљен је бројним факторима, рецимо: претходним знањем које ученик поседује, когнитивним процесима, мотивацијом, социјалним факторима, индивидуалним склоностима и способностима итд. (Pretz et al., 2003).

У другој етапи часа руководеће дејство имају ученици који формулишу и постављају хипотезе. Уколико су ученици оспособљени да постављену проблемску ситуацију разумеју и ако добро владају њеним основним подацима, они ће успостављати корелацију између података који постоје али и између познатих и непознатих података, те ће износити претпоставке које их могу довести до решења постављеног проблема. Важно је ученике усмеравати да се ослоне на претходна знања и да та знања и искуства повежу са оним што је за њих новина. Подстицање критичког мишљења у овој фази је врло корисно, јер ће тако ученици извршити адекватну селекцију нових података на битне и небитне, при сусрету са истим (Ђорђевић, 1972).

Трећу етапу карактерише рашчлањавање проблема на његове компоненте, те се ученици опредељују за директно или индиректно решавање истог. Било би пожељно да сваки ученик самостално предлаже своје идеје за решавање проблема и тако гради и осмишљава стратегије које ће га усмерити на прави пут. У овој етапи од великог значаја може нам бити Пољин (Polya, 1956) поглед на пут до решења који предлаже ученику следеће: „Пођи од главних делова свога задатка, разматрај их по реду, разматрај их наизменично, разматрај их у разним комбинацијама повезујући сваки детаљ с другим детаљем и с целином задатка!“ (стр. 29).

Решавање проблема је оличење четврте етапе при реализацији проблемске наставе. Према Пољи (Polya, 1956) пут до решења проблема сатакан је разним начинима, поступцима и методама који изграђују одређену стратегију, кроз коју се прожимају и стварање плана решавања и избор исправних идеја које воде до циља. Стратегије које воде до решења постављеног проблема у најширем смислу посматрају се као шеме којима руководе разноврсне мисаоне активности и способности (Антонијевић, 2008). Наставник у овој етапи треба посебно да испоштује принцип сврсисходности и економичности проблемске наставе како би ученику обезбедио довољно времена да размотрио различите стратегије решавања проблема.

Током одигравања наведеног процеса било би пожељно да наставник допусти ученику самосталан рад и остане неутралан (Robinson, 2015). Следећа шема показује нам пут којим се долази до решавања постављеног проблема (Kadum, према: Симић, 2015: 121).



Слика 1. Пут који води до решења задатог проблема

Пету етапу одликује генерализација коју могу изводити ученици самостално или уз минималну помоћ наставника, као и приступање ученика анализи и провери резултата у смислу да ли добијени резултати одговарају постављеним условима проблема. Проблем је решен тек онда када се добијено решење верификује. Уколико се дође до закључка да решење ипак није тачно, ученику једино преостаје да се врати у почетну позицију и изнова понови своје активности усмеравајући своју пажњу на неке нове стратегије решавања. Многе ситуације су потврдиле да ученици након фазе верификације схвате да су задати проблем могли решити и уз улагање мањих напора, односно на лакши начин (Костић, 2006). Мирков (2006) даје низ питања које ученици могу поставити сами себи а у вези су са евалуацијом решеног проблема. Реч је о питањима следећег типа: Да ли сам остварио постављени циљ? Шта ми је помогло? Шта ми није помогло? Да ли ћу сличан проблем решавати другачије?

Најзад, шеста етапа се заснива на идеји да ученици своја стечена знања примењују у другим сличним или различитим ситуацијама. Уколико ученик успешно примени своје знање у потпуно новој ситуацији може се констатовати ниво стваралачког решавања проблема. Ако је ученик успешно прошао све наведене фазе проблемске наставе, можемо бити сигурни да поседује врло квалитетно знање у оквирима наставног садржаја математике који је био под утицајем наведеног наставног система.

Сличне фазе кроз које пролази реализација проблемске наставе представља и Дјуи: (1) сусрет са проблемском ситуацијом, (2) формулисање проблема, (3) задржавање и одбацивање хипотеза, (4) проверавање хипотеза кроз утврђени след активности (Aquino, 1998).

Према Вуковићу (1996) организација часа проблемске наставе обухвата девет фаза које су својствене фазама претходно наведених аутора. Те фазе представимо кроз релевантан пример, како бисмо се још више приближили позитивним ефектима проблемске наставе које она остварује у почетној настави математике.

1. Постављање проблема ученицима од стране наставника и упознавање ученика са проблемом. На пример: За пет хаљина потрошено је 20m платна. Колико се хаљина може сашити од 32m платна?

2. Анализа проблема и уочавање важних информација. Дакле, дужина платна је 32m, а за пет хаљина је потребно 20m платна. Потребно је осмислити математички модел који ће помоћи ученицима да реше проблем.
3. Уочавање комплексности проблема и потврђивање неопходности за увођењем релевантног модела. У овој фази налазе се одговори на следећа питања: Који модел увести? Којим поступком решити задатак (решавањем једначине или неједначине, методом лажне претпоставке, поступком мерења, вагања или пресипања, методом дужи, графовима, таблицом итд.)? У овом случају као адекватна стратегија за решавање овог задатка послужиће нам састављање једначине.
4. Пошто је извршен избор модела који се уводи у овој фази се приступа остваривању информационе базе за моделовање. Та база је саткана од следећих елемената: за пет хаљина употребљено је 20m платна (позната информација), број хаљина које се могу сашити од 32m платна је непознат и означимо га са x .
5. Дефинисање модела. Дакле, стратегија која ће помоћи да се постављени проблем реши састоји се у постављању једначине (пропорције): $20m : 5 = 32m : x$.
6. Ову фазу карактерише испитивање на моделу, што у нашем случају значи решавање постављене једначине: $32m : x = 20m : 5$

$$32m : x = 4m$$

$$x = 32m : 4m$$

$$x = 8$$
7. Интерпретација резултата добијеног посредством уведеног модела. Добијено решење је $x=8$, што значи да се од 32m платна може сашити 8 хаљина.
8. Фаза верификације добијеног решења. Дакле, ако се од 32m платна може сашити 8 хаљина, онда је за сваку хаљину потребно 4m платна, што значи да је за 5 хаљина потребно $5 \cdot 4m$, а то је 20 m платна, што је својствено условима постављеног проблема.
9. Нема потребе вршити модификацију проблема јер је добијено решење тачно. Тиме је решен постављени проблем, а уједно и остварен жељени циљ.

Можемо рећи да се Вуковић у својој концепцији извођења проблемске наставе наслањао на етапе решавања проблема које је представио Поља (Polya, 1962) а реч је о: схватању или разумевању са анализом задатих услова у проблему; стварању плана за решавање проблема; реализацији постављеног плана; провери тачности, дискусији и интерпретацији решења. Прва етапа коју Поља наводи односи се на пажљиво слушање или читање текста постављеног проблема од стране ученика, с посебним усмерењем на уочавање елемената који су задати с једне стране, односно који се траже, с друге стране. Након успешно савладаног првог корака, ученик прелази на други тј. другу етапу у којој ученик врши класификацију и избор неопходних математичких знања која су му неопходна за решавање постављеног проблема.

За ову фазу врло је битно да ученик добро познаје особине и кључне елементе математичког моделовања, јер избор и увођење адекватног модела гради пут до решења³. Трећу етапу Пољине концепције одликује примена стечених знања и рад према утврђеном моделу.

³ „У млађим разредима основне школе поступно се уводе логичко-комбинаторни модели, модели основних рачунских операција, модели једначина, модели неједначина, аритметичко-логички модели, геометријски модели решавања проблема и модели геометријских проблема. Осим наведених модела, у додатној настави математике у четвртог разреда примењују се модели проблема мерења, модели проблема на квадратној мрежи и модели стохастичких појава” (Петровић и Пинтер, 2006: 92).

Ученик примењује већ утврђене поступке и правила којима се манифестује изналажење решења (решава једначине и неједначине, израчунава вредност аритметичких израза и сл.). Последња, четврта фаза, односи се на проверу тачности, дискусију и интерпертацију решења у којој ученици приступају детаљном сагледавању задатка и његовим структуралним елементима. Провера тачности задатка односи се на отклањање евентуалних грешака уколико постоје. Дискусија између ученика се своди на анализу услова које се појављују у процесу решавања, док интерпертација подразумева давање одговора који је у вези са садржајем постављеног проблема. У случају да се испостави да решење до ког су ученици дошли није тачно, неопходно је вратити се у фазу стварања плана а потом га кориговати или модификовати. Уколико то није могуће, мора се приступити сачињавању новог плана и избору новог модела.

Арендс (Arends, 2012) подржава следеће фазе кроз које би требало да прође спровођење проблемске наставе: (1) увођење ученика у проблем; (2) организација ученика и припрема за учење; (3) истраживање; (4) развијање идеја и представљање решења; (5) анализа и вредновање добијених резултата. До сада све наведене фазе имплементације проблемске које предлажу различити аутори углавном имају исту или сличну структуру, где је негде та структура приказана у сажетом облику, а негде је додатно рашчлањена на мање, композиционе делове.

Ако бисмо наставни час посматрали кроз уводни, главни и завршни део часа то би значило да у уводном делу часа наставник треба да постави одређени проблем и тиме створи атмосферу у којој доминира радозналост, упитност и заинтересованост од стране ученика. Одлика главног дела часа јесте подстицање високог степена мисаоних активности код ученика како би целовито сагледали постављени проблем, анализирали га и рашчланили на његове структуралне елементе, те увидели шта је дато, а шта непознато. Врло је важно да хипотезе поставе ученици самостално па да о њима расправљају, а потом и да супротстављају и усаглашавају мишљења. Практичном применом хипотеза решење се смешта у један шири систем знања. Утврђивањем градива путем решавања проблема остварује се ефикасан трансфер учења и примена знања у новим ситуацијама, што би могла бити претпоставка завршног дела часа (Вилотијевић, 1999).

Да би се извршило успешно организовање и спровођење проблемске наставе на часу математике пожељно је придржавати се дидактичко-методичких упутстава које предлаже Ничковић :

- „све наставне јединице нису пригодне за „проблематизовање“ проблем треба поставити на почетку часа на начин који ће мотивисати ученика;
- тежина проблема треба да одговара узрасту ученика;
- нови проблем треба да се бар делимично заснива на претходном искуству и знању ученика;
- код ученика треба развијати способност за критичко и стваралачко приступање решавању проблема;
- у настави је најзначајније да ученици уоче суштинске везе и односе;
- треба стварати ситуације у којима ће ученик упознавати различите технике учења и самосталност рада;
- веома је важно пружити могућност сваком ученику да изложи своје хипотезе и предлоге за решавање проблема;
- решавање проблема не треба схватити као круту шему;
- треба препустити ученицима да сами постављају проблеме и планирају решавање;

- плодоноснији је рад када ученици сами оцењују резултате и организацију процеса учења помоћу решавања проблема“ (Ничковић, према: Бранковић, 1999: 116).

Према Кајић (1981) проблемска настава пружа структуру васпитно-образовног процеса који одговарају структури научног истраживања. Дакле, „стварање проблемске ситуације, формулисање проблема (постављање хипотезе, избор метода и облика рада за истраживање проблема), решавање проблема и анализа резултата истраживања који аргументују веродостојност хипотезе“ (стр. 12).

Јукић (2001) јасно истиче да у модерној-активној настави, у којој се постављају проблеми, у којој ученици сами трагају за одговорима на основу сопствених посматрања, анализе, синтезе, суђења и закључивања, нужне су активне паузе у којима се решава задати проблем. Сваки проблем који се нађе пред учеником захтева од њега ангажовање различитих мисаоних способности које доприносе развоју критичког и стваралачког мишљења, што је уједно и један од циљева проблемске наставе. Да би ученик успешно решио постављени проблем, мора имати довољно времена да размишља и конструише прави одговор, а потом и да адекватно решење.

Цекуш и Наместовски (2005) истичу да:

„увек треба дати предност проблемској настави, створити проблемске ситуације и ученике суочити са чињеницама. Задатак наставника је да одреди најпоузданије и најефикасније методе, облике рада, садржаје, наставна средства и изворе знања. Учење из различитих извора знања је од посебне важности за активно стицање знања, што је једна од битних карактеристика савременог образовања“ (стр. 17).

Кроз проблемску наставу ученици развијају специфичне вештине, размишљају критички, анализирају и решавају комплексне задатке, реалне проблеме, проналазе, процењују и користе одговарајуће изворе знања (Savery, 2006).

1.3.3. Принципи, облици и нивои проблемске наставе

Како би се одређена настава сматрала проблемском неопходно је руководити се и испоштовати општа начела и принципе који одсликавају њену ефикасност и веродостојност у наставном процесу. Већ смо нагласили да проблемска настава има вишедимензионални карактер која га испољава кроз развој најсложенијих мисаоних активности код ученика, потом делује на интегрисање постојећих и нових знања, тежи повезивању апстрактног математичког и реалистичног света, те подржава примену стечених знања у новим ситуацијама. Да би се та мултифункционалност оправдала нужно је придржавати се принципа проблемске наставе који су дефинисани с обзиром на проблем и проблемску ситуацију. Дакле, реч је о пет принципа проблемске наставе које је потребно уважити да бисмо остварили постављене циљеве које пред нас ставља савремено образовање (Galjperin, 1972; Leontiev, 1981; Vygotsky, 1985):

1. Принцип атрактивности проблемске ситуације и проблема;
2. Принцип примерености проблема;
3. Принцип сврсисходности и економичности проблемске наставе;
4. Принцип мотивисаности ученика;
5. Принцип привржености наставника проблемској настави.

У даљем тексту говорићемо о представљеним принципима појединчано како бисмо још дубље зашли у ефекте које проблемска настава испољава у подручју почетне наставе математике. Принцип атрактивности проблемске ситуације и проблема огледа се у одређеној необичности, несвакидашњости, неочекиваности или противуречности. Дакле, да би се испоштовао овај принцип потребно је ученике заинтересовати проблемском ситуацијом која у себи садржи нешто интересантно, занимљиво и ученицима допадљиво (Вилотијевић, 1998). Само тако осмишљена проблемска ситуација код ученика ће пробудити жељу и вољу за учење путем решавања проблема.

Принцип примерености проблема, као што сам назив каже проблем који се поставља пред ученике мора бити примерен њивом узрасту, као и њиховим могућностима и способностима. Посебно је потребно водити рачуна о ученичким предзнањима и досадашњим искуствима. Проблем мора бити осмишљен тако да представља одређену тешкоћу за чије решавање је потребно да ученици користе веће мисаоне напоре. Ако пред ученике ставимо исувише тежак проблем то ће деловати демотивишуће на њих и врло често ће ученици одустати од решавања. Међутим, с друге стране, ако је проблем превише лак код ученика ће оправдано изостати интересовање, а самим тим изгубиће жељу и вољу за стицањем нових и применом већ стечених знања. Како бисмо одмерили проблем да не буде ни превише тежак али ни превише лак можемо се позвати на „зону наредног развоја“, која према Виготском подразумева постављање одређене тешкоће пред ученика у смилу мало више од онога што ученик може. Тако се ученик ослања на своје претходно искуство и знање, а уједно и улаже потребан напор да реши нешто непознато и тиме стиче ново знање које може користити у неким другачијим ситуацијама по истом принципу (Vygotsky, 1985). Најадекватније је формулисати проблеме који су сродни животним искуствима ученика јер ћемо тада бити сигурни да ученици неће слепо нагађати одговоре (Вилотијевић, 1998).

Када је у питању принцип сврсисходности и економичности јасно је да морамо добро утврдити прикладност и временске оквири које од нас захтева не само реализација проблемске наставе већ и сама припрема овог наставног часа. Већи утрошак времена приликом имплементације овог наставног система резултира усвајањем трајнијих и применљивих знања. Иако су многи налази потврдили чињеницу да проблемска настава има знатно већу примену у настави математике од осталих наставних система, ипак не можемо само њу користити, како не би дошло до засићења и пада интересовања ученика. Наставник је организатор целокупног наставног процеса, он тим процесом руководи тако што ученике оспособљава за самообразовање. Другим речима, наставник је креатор који управља елементима самосталне делатности ученика, с тога мора водити рачуна о сврсисходности наставе коју примењује (Баковљев, 1992).

Принцип мотивисаности ученика заснива се на представљању проблемске ситуације тако да њени елементи садрже нешто што ће код ученика пробудити вољу и жељу за њеним разрешењем. Другим речима, сегменти постављеног проблема треба код ученика да пробуде одређене унутрашње мотиве у виду сазнања, да ће уколико реши задати проблем научити нешто што ће му бити применљиво и у свакодневном животу. Значи, ако постоји повећана радозналост и знатижеља при решавању датог проблема од стране ученика, онда сасвим сигурно можемо рећи да ће активизација мишљења бити на високом нивоу, а самим тим и стечено знање ће бити ефикасније у смислу примене у другачијим ситуацијама.

Похвале, награде или казне су оличење спољашње мотивације и врло су делотворне у погледу самосталног приступа ученика проблему, при чему долази до истицања такмичарског духа ученика, где ученик жели да покаже своје способности наставнику и вршњацима. С друге стране не смемо заборавити и дејство унутрашње мотивације која највећи удео остварује у упознавању света, предмета и квантитативних односа у њему. Ученици који су унутрашње мотивисани показују наклоност према одређеним наставним садржајима, док сваку тешкоћу посматрају као вид изазова који покушавају да савладају и реше. Код таквих ученика стална питања, потпитања и идеје никада не изостају (Nagun et al., 2012). У вези са тим деца уче решавање неког несклада, конфликтне ситуације и исказују потребу дефинисања света око себе, истраживањем и откривањем (Дејић и Ћебић, 2010). Егерић (2001) јасно наводи „да би учење било успешно, мора му претходити јака мотивација, односно ученикова жеља, намера, да се уложи напор да би нешто научио, стекао знање“ (стр. 36). Дакле, да би успешно решили проблем, ученици најпре морају испољити жељу да то ураде, док истовремено морају веровати у себе да ће успети да га реше. Одреднице понашања ученика, као што су труд, упорност и поверење важни су фактори при решавању проблема (Jonassen & Tessmer, 1996).

Принцип привржености наставника проблемској настави такође се мора уважити, јер ако сам наставник сматра да је тај наставни систем неизводљив, претежак, неекономичан, ако нема поверења у њу и остварује је без икакве воље, онда крајњи исход неће имати позитиван ефекат. У супротном, ако наставник радо примењује овај наставни систем и познаје све његове предности и недостатке онда ће и постављени циљеви бити успешно достигнути. Наиме, мора постојати јака корелација између субјективних мотива и постављеног циља.

Позивајући се на сазнајне активности и интелектуалне напоре ученика када је реч о проблемској настави, истаћемо три облика учења путем решавања проблема с обзиром на стварне облике стваралаштва. Најјаснију слику тих облика дају Вилотијевић и Вилотијевић (2016), а ту спадају:

- „научно стваралаштво – теоријско истраживање, тј. откривање нових правила, закона, доказа. У темељу овог облика проблемског учења налази се постављање и решавање теоријских питања;
- практично стваралаштво – захтев за практичним решењем, тј. начином примене знања у новој ситуацији, конструкцијом, проналаском. Постављају се и решавају практични проблеми;
- уметничко стваралаштво – уметничко изражавање стварности на основу стваралачке маште укључујући цртање, игру, музицирање итд.“ (стр. 41).

Све облике проблемског учења које смо навели карактеришу заједничке особине продуктивне и стваралачке активности ученика с једне стране, односно истраживање, разматрање и решавање проблема, с друге стране. Да бисмо утврдили степен активности ученика при решавању проблема нужно је да правилно одаберемо и ниво проблемске наставе. Бранковић (1999) у оквиру нивоа проблемске наставе говори о: проблемском излагању (проблемски монолог), дијалогском излагању (проблемски дијалог), самосталном решавању проблема и самосталном формулисању и решавању проблема. Кроз даљи текст објаснићемо главне одлике и смернице сваког од наведених нивоа.

Први ниво, уједно и најнижи степен проблемске наставе, јесте проблемски монолог наставника у коме ученици испољавају минималан ниво ангажовања и испољавају најмању активност. Наставник је тај који поставља и спроводи стратегију решавања проблема, док су ученици у позицији слушалаца који теже да схвате и запамте презентоване садржаје.

Своје мишљење, начине и поступке решавања, хипотезе и закључке наставник намеће ученику захтевајући од њега да се сложи са изнетим ставовима. Овај ниво проблемске наставе је минимално активирајуће природе и примерен је увођењу ученика у садржаје који се не наслањају и нису ни у каквој вези са претходним искуствима и знањима ученика (Дејић, 1998). Међутим, како бисмо успешно користили више нивое проблемске наставе ученици се претходно морају упознати са проблемским излагањем. Овакав став подржава Теодосић (1970) кроз мишљење да наставник у оквиру спровођења проблемског монолога ученика на неки начин већ доводи у везу са проблемом. Према Спајићу (2005) улога проблемског монолога не огледа се у пружању готових информација ученицима, већ се наставник труди да поједностави пут који води од проблема до његовог решења. Такође, не можемо проблемски монолог поистоветити са монологом који одликује традиционалну предавачку наставу, из простог разлога што је проблемско излагање наставника на знато вишем емоционалном нивоу и позитивно утиче на мотивацију и развој интересовања ученика.

Проблемски дијалог наставника и ученика је виши ниво проблемске наставе у којем су ученици активни учесници наставног процеса, а самим тим присутан је и виши степен активизације. Наставник ће и у овом случају поставити проблемску ситуацију и формулисати проблем, али ће пут до његовог решења тражити уз помоћ ученика. Дакле, остваривањем кооперативног односа између наставника и ученика и вођењем дијалога ученици ће представљати своје поступке и стратегије током решавања проблема. Питања која наставник поставља ученицима најпре морају бити јасна и разумљива, а потом наставници треба да обрате пажњу да не постављају ученицима питања у којима се: „тражи мање од онога што ситуација дозвољава да се објасни; пита се више од онога што дате ситуације дају повода да се пита; пита оно што се садржи у ситуацији као податак“ (Заботин, 1971:425). Главна одлика проблемског дијалога налази се у рашчлањавању главног проблема на више мањих. Разлози за то су оправдани, јер је много већа вероватноћа да ће неко од ученика из одељења успети да одговори бар на неки од тих делова. Уколико ученици не дођу успешно до циља, односно не реше проблем, наставник може ученицима саопштити решење. Погрешно је мислити да у оваквом случају проблемска настава губи свој квалитет, јер ученици иако нису успели да дођу до тачног решења ипак су били мисаоно активирани кроз покушаје да тај проблем реше. Знања која су ученици стекли проблемским дијалогом имају много већи учинак и много већу вредност насупрот знањима која су стекли примањем готових чињеница.

Пољак (1977) истиче да комуникација која се јавља у проблемском дијалогу мора бити двосмерна. Дакле, наставник ће постављати ученицима питања и потпитања, али исто тако и ученицима мора бити дозвољено од стране наставника да предложи своје идеје и начине решавања задатог проблема. Наставник мора бити стрпљив и савестан, те саслушати сваког ученика и уколико је то потребно релевантним питањима га усмерити на исправан пут који води до решења.

Курник (2006) сматра да наставници углавном праве грешке што своја питања најрадије постављају бољим ученицима за која су сигурни да да ће дати конкретан и прецизан одговор, у ситуацијама када други ученици на постављено питање не дају одговор онакав какав је наставник замислио или очекивао. То је велика слабост, јер наставник тада не може да закључи из ког разлога је ученик погрешно одговорио и какав је пропуст направио па је дошао до одговора који није прецизан и својствен постављеном питању. Главна тежња наставника треба да буде у отклањању баријера и пропуста које ученици праве свесно или несвесно при формирању стратегија за решавање проблема.

Самостално решавање проблема представља трећи ниво проблемске наставе у коме наставник ствара проблемску ситуацију и формулише проблем, док је задатак ученика да самостално изнађу пут до решења постављеног проблема. Ученицима је дозвољено коришћење различитих извора с циљем истраживања релевантних метода и поступака да се задати проблем реши.

Самостално постављање и решавање проблема представља највиши ниво проблемске наставе јер захтева максимално активирање мисаоних процеса ученика, у смислу побуђивања критичког и стваралачког мишљења, а све с циљем доласка до исправног решења задатог проблема. Проблемску ситуацију у овом случају такође презентује наставник, док је задатак ученика да самостално формулишу проблем, потом, изврше његову декомпозицију, а затим га реше. Кроз овакву активност ученика наставник ће имати повратну информацију о томе колико су ученици успешно разумели постављену проблемску ситуацију и уочили узрочно-последичне везе између њених саставних чинилаца. Да би се постављени проблем на овом нивоу успешно решио потребно је водити рачуна о адекватном избору проблема, што значи да морамо добро познавати могућности, способности и искуства ученика, те им не смемо поставити исувише тежак али ни превише лак проблем. Такође, морамо добро мотивисати ученике како би им пробудили жељу за стицањем и стварањем нових и применом постојећих знања. Декомпозиција главног проблема мора бити добро извршена, у супротном ученици ће се кретати у погрешном правцу и неће успети да дођу до жељеног циља.

Избор нивоа проблемске наставе зависи од бројних фактора. Најпре од карактера наставног садржаја, потом од дидактичко-методичких циљева часа, ту нам се намеће и степен ученикове припремљености за проблемску наставу који такође морамо узети у обзир, потом материјални и многи други услови рада у школи.

Махмутов такође говори о четири нивоа проблемске наставе само кроз другачију формулацију.

1. „Обична несамостална активност – ученици слушају наставникова објашњења, прихватају обрасце мисаоне активности у проблемској ситуацији, раде самостално, њихове вежбе су репродуктивног карактера.
2. Полусамосталне активности – одликују се применом усвојених знања у новим ситуацијама, а ученици са наставником учествују у тражењу решења за постављени проблем.
3. Самосталне активности – предвиђају се самостални радови репродуктивно-истраживачког типа када ученици самостално раде на уџбеничком тексту, примењују усвојена знања у новој ситуацији, конструишу решења задатака средње сложености, логичком анализом доказују хипотезе уз незнатну помоћ наставника.

4. Стваралачке активности – карактеристичне су по самосталним радовима који захтевају стваралачку машту, логичку анализу, откривање новог начина решавања, самостално доказивање. На овом нивоу очекују се самостални закључци, уопштавања, изуми. Ту је место у уметничком стваралаштву“ (Махмутов, према: Вилотијевић и Вилотијевић, 2016:42).

Ако бисмо извршили компаративну анализу налаза до којих су дошли Махмутов (1997) и Бранковић (1999) када су у питању нивои проблемске наставе јасно се види да је корелација између наведених нивоа проблемске наставе код оба споменута аутора јака. Посебно ћемо прокоментарисати четврти ниво проблемске наставе која за Бранковића представља самостално формулисање и решавање проблема, док је за Махмутова то стваралачка активност. Ово нам је само једна околност која потврђује један од циљева проблемске наставе, а то је подстицање и развој стваралачког мишљења код ученика. Пошто је знање основа продуктивног мишљења Махмутов (1997) сматра да је примена стваралачког и продуктивног мишљења одраз репродуктивности. Одређена репродуктивна активност је основа за сваку истраживачку делатност.

Бавећи се упоређивањем нивоа традиционалног и проблемског приступа Крутецки (Крутецкий,1972) у следећој табели наводи нивое који су конструисани на основу броја активности наставника и ученика на часу.

Табела 3. Компарација између традиционалне (ниво 0) и проблемске наставе (ниво I,II,III) према Крутецком

Ниво	Број активности које емитује наставник	Број активности које емитује ученик	Шта ради наставник?	Шта ради ученик?
0 (традиционални)	3	0	–поставља проблем – формулише га –решава роблем	– памти решење проблема
I	2	1	– поставља проблем – формулише га	– решава проблем
II	1	2	– представља проблем	– формулише проблем – решава проблем
III	0	3	– спроводи целокупну организацију, надгледа и води	– свестан проблема – формулише проблем – решава проблем

Анализирајућу представљену табелу јасно је уочљиво да број активности које емитује ученик у традиционалној настави одговара 0, док се број активности у проблемској настави, с обзиром на ниво повећава. Што је ниво виши активност ученика је доминантнија. Ова табела нам такође указује на позитиван ефекат проблемске наставе у настави математике.

1.3.4. Нека практична упутства за примену проблемске наставе

Бројни налази и истраживања о којима ћемо говорити касније, потврђују велику ефикасност имплементације проблемске наставе у почетној настави математике. Међутим, да би се остварили циљеви за које је овај наставни систем предодређен важно је да се упознамо и придржавамо неких основних смерница и импликација које су изведене непосредно након спровођења.

Свако додатно упутство које је засновано на различитим искуствима свакако ће послужити у смислу што боље организације и реализације часа проблемске наставе. Неке практичне импликације и сугестије у вези са применом проблемске наставе јасно је образложио Дејић (2000) кроз своју методику. Он најпре истиче да организација часа проблемске наставе треба да тече према етапама које смо већ навели (од стварања проблемске ситуације, преко хипотеза, декомпозиције проблема, решавања проблема, па све до примене стечених знања у новим ситуацијама). Проблемску ситуацију треба представити на почетку часа и осмислити је тако да у себи садржи нешто атрактивно и занимљиво с једне стране, али и нешто поучно, с друге стране. Посебно је важно водити рачуна о примерености проблема са којим ученици треба да се сусретну. Проблем мора одговарати ученичким склоностима, могућностима и способностима, ослањајући се на претходна знања и искуства. Наставник мора бити добар планер и организатор приликом спровођења проблемске наставе у смислу доброг владања ситуацијом на часу и адекватно конструисаним временским оквиром.

Код ученика је потребно развијати и васпитне црте личности које се одликују упорношћу и истрајношћу, јер сваки проблем који се пред њима нађе одисаће одређеном тешкоћом коју није лако савладати уз минималне напоре. Да би успели да реше постављени проблем ученике је потребно оспособити да увиђају узрочно-последичне везе између декомпонованих делова глобалног проблема што ће условити развој мишљења. Такође, битно је ученике оспособити да на путу који води до решења проблема користе различите методе и поступке (стратегије) и ослободити их крутих оквира шаблонског мишљења. Уколико је то могуће ученицима треба допустити да самостално формулишу проблеме и износе личне стратегије које ће им помоћи при решавању. Наставник ту треба да заузме улогу актера који пружа минималну помоћ ако уочи да је ученик кренуо погрешним путем. Оно што је према мишљењу Дејића такође врло битно јесте стварање окружења за максимално активирање ученика, од почетне ситуације до решавања проблема и интерпретирања закључака. Погодно је користити вођење хеуристичког разговора, метод откривања и сл.

Све наведене импликације у вези са спровођењем проблемске наставе у директној су вези са принципима овог наставног система о којима смо говорили нешто раније. Видимо колико је важно испоштовати сваки принцип ове наставе, јер његова улога оправдава и практични значај. Махмутов (1972) наглашава да проблемска настава не мора имати само истраживачки карактер, већ је неопходно неговати и репродуктивну делатност ученика.

Према Рамуљу (1963) методичка правила која би требало испоштовати приликом решавања проблема у проблемској настави огледају се у следећем:

- не треба ученике пожуривати приликом решавања проблема;
- све недоумице и нејасноће објаснити пре почетка формирања стратегије неопходне за решавање проблема;
- битно је сачувати еластичност и гипкост мишљења током решавања проблема;

- избегавати неадекватне начине и поступке решавања задатих проблема са једног на други;
- треба имати виду и чињеницу да се до решења неког проблема може доћи изненадним путем.

„Проблемска настава не решава све образовне и педагошке задатке, с тога не може заменити целокупан дидактички систем укључујући различите врсте, методе и облике организације образовног процеса. Међутим, општи систем образовања не може се развијати без коришћења учења путем решавања проблема“ (Махмутов, 1975: 337). Овакву претпоставку разумећемо као намеру аутора да укаже на чињеницу да је пожељно проблемску наставу комбиновати и са другим наставним системима, јер постоје и активности у којима водећу улогу имају други дидактички системи.

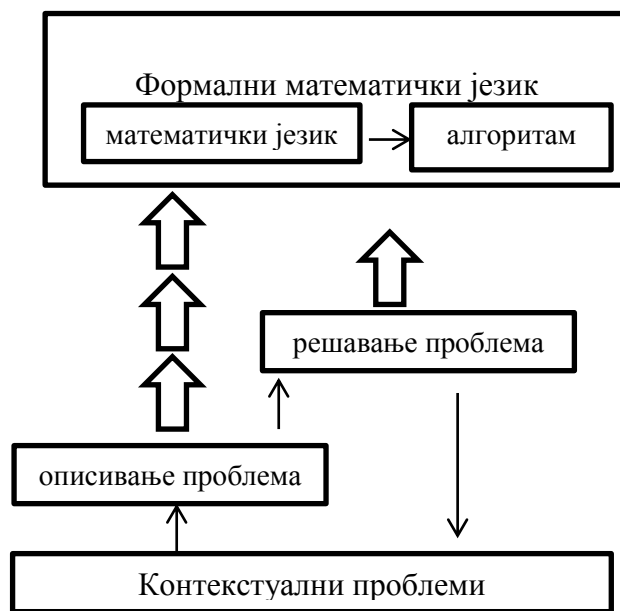
Успешна организација, спровођење и реализација проблемске наставе зависи од много фактора међу којима два имају круцијелну улогу, а то су наставник и ученик. За проблемску наставу математике најзначајнија је активност и то духовна активност наставника и ученика. Различито оријентисане активности наставника и ученика, наставнику пружају могућност остваривања замишљеног циља у смислу успешно спроведене проблемске наставе, док ученику активности помажу да своја знања користе, примењују и проверавају (Пољак, 1977). Максимално активирање ученика оствариће се само путем активних облика учења, а то су облици путем којих ученици смишљају стратегије за решавање одређеног проблема у проблемској настави (Furlan, 1966).

1.4. Реалистично математичко образовање као егземплар савремене примене проблемске наставе

Реалистично математичко образовање (РМО) заснива се на Фројденталовој концепцији наставе математике. То је теорија у којој је процес учења базиран на процесу открића математичких идеја, где је основни циљ разумевање процеса математизације (Heuvel-Panhuizen, 2001; Милинковић, 2007; Романо, 2009а; Ђокић, 2014). Математизација је основна одредница реалистичног математичког образовања и представља процес учења у коме се елементи реалног света претапају у математичке појмове. Хоризонтална и вертикална математизација према Треферсу (Treffers, према: Романо, 2009б) кључни су сегменти у РМО, те с тим у вези неопходно је објаснити шта се у оквиру њих подразумева. Дакле, када је реч о хоризонталној математизацији главна тежња заснована је на модификацији и трансформацији математичких проблема који су смештени у реалну ситуацију. Хоризонтална математизација подразумева следеће активности: стварање шема, преображај реалног проблема у математички проблем, препознавање и уочавање сличности између различитих проблема, као и дефинисање и формулацију проблема са различитих становишта. С друге стране, налази се вертикална математизација коју одликује реконструкција математичких знања у оквиру једног математичког система. Активности које су оличење вертикалне математизације огледају се у: коришћењу формула за представљање одређених релација, трансформацији и коришћењу различитих модела, комбиновању модела и уопштавању.

Фројденатал (Freudenthal, 1991) упоређујући хоризонталну и вертикалну математизацију наглашава да се хоризонтална математизација заснива на кретању из реалног света у симболички свет, док вертикална математизација подржава кретање само у подручју симболичког света. Овакав процес учења доминантан је у већини земаља Европе и у Сједињеним Америчким Државама, па се посматра као једна од важнијих актуелних стратегија подизања математичког образовања на један виши ниво (Sriraman & English, 2010). Идеја препознавања проблема у реалним ситуацијама и могућности његовог решавања су фундаментална карактеристика реалистичног математичког образовања (РМО). Дакле, у РМО се полази од реалних ситуација које су ученицима блиске и представљају главни извор учења, не само што се нови појмови уводе кроз решавање проблема, већ такве ситуације делују мотивишуће на ученике подстицајући их да стварају нове стратегије за решавање проблема (Милинковић, 2016).

Да бисмо избегли оквире класичног приступа морамо разликовати реалистични проблем од контекстуалног проблема. Оно по чему се реалистични проблем издваја у односу на контекстуални, јесте ситуација која захтева кретање путем целокупног циклуса моделовања и стварања модела, те се такав модел може примењивати у сличним новонасталим ситуацијама. Улога проблема у реалном контексту посматра се са два аспекта. Први се односи на откривање новог појма, док се други посматра кроз проблемску ситуацију која се користи за приказ математичког знања у функцији решавања реалистичног проблема (Милинковић, 2016). Резултати ученичких активности у поступку решавања проблема огледају се у развијању модела са којим су ученици блиски. Модел настаје путем математичког моделовања тј. хоризонталне математизације (Stillman, 2007). Следећа шема представља сликовит опис поновног откривања према Гревемејеру (Gravemeijer, према: Romano, 2009б: 13)



Слика 2. Модел поновног откривања

Према представљеној шеми уочљиво је да процес учења започиње контекстуалним проблемом. Даљим кретањем кроз шему видимо да применом хоризонталне математизације ученик долази до једног неформалног и једног формалног модела.

Потом, употребом вертикалане математизације (упоређивање, уочавање узрочно-последичних веза, решавање) ученик долази до решења проблема. Затим, ученик представља решења, али уједно и говори о стратегијама које је користио у сличним контекстуланим проблемима. Наиме, тек након свих наведених активности ученик ће располагати одређеним математичким знањем (Романо, 2009б).

Када бисмо ову шему посматрали са становишта проблемске наставе видимо да је њена суштина саткана у елементима споменутог наставног система. Дакле, садржајна основа проблемске ситуације налази се у контекстуалном проблему, док се формулисање хипотеза и декомпозиција проблема налазе у оквиру описивања проблема. Алгоритам решавања проблема представља стратегију уз помоћ које је проблем решен, док се математички језик односи на симболичке записе и пут процеса који воде до решења, а у проблемској настави релевантан је декомпозицији проблема и увиђању повезаности између њих. Примена усвојених знања може се проверити кроз неке сличне контекстулне проблеме.

У реалистичном математичком образовању Гравемејер разликује четири ступња модела (Gravenmeijer, према: Романо, 2009б: 15):

- „1. ситуациони ступањ,
2. референтни ступањ,
3. општи ступањ и
4. ступањ формалне математике“

У оквиру ситуационог ступња указује се на познавање ситуације и формирање стратегије која се користи за решавање дате ситуације. Референтни ступањ подразумева везу између модела и стратегија са ситуацијом у датом проблему. Општи ступањ захтева преовладавање стратегије у математичком фокусу у односу на контекст. Најзад, усвајање појмова и процедура доводи до ступња формалне математике. На основу реченог, можемо закључити да РМО с правом представља егземплар савремене примене проблемске наставе. Оно што је у РМО ситуациони ниво, у проблемској настави је стварање проблемске ситуације. Даље, оно што је у РМО референтни ниво, то је у проблемској настави стварање хипотеза и декомпозиција проблема. Општи ниво у РМО обухватиће решавање проблема, док ће ниво формалне математике омогућити извођење закључака, генерализацију и примену стечених знања. Као што смо већ истакли, уочавање веза између одређеног модела и стратегије решавања датог проблема основа је за развој разумевања истог. Јако је важно омогућити ученицима да развијају сагледавање проблема са различитих становишта.

Пошто процес решавања подразумева коришћење математичког моделовања, основна тежња је да се олакша развој холистичког приступа проблемима и повезаност функционалних знања (Милинковић, 2010). Рецимо, један такав курикулум за ученике старијих разреда основне школе јесте уџбенички комплет Математика у контексту (Mathematics in Context) чија је основна одлика наглашавање веза између математичких појмова и реалистичних ситуација.

С обзиром на структуру наставног часа Романо (2009б) прави јасну разлику између традиционалног и РМО приступа (Табела 4).

Табела 4. Компарација традиционалног и РМО приступа с обзиром на структуру часа

Приступ / Део часа	ТРАДИЦИОНАЛНИ ПРИСТУП	РМО ПРИСТУП
Уводни део часа	Прегледање домаћег задатка и увод у наставну јединицу.	Увод у наставну јединицу.
Главни део часа	- Постављање проблема од стране наставника; - Решавање проблема од стране ученика који се обично налазе у уџбенику који ученици користе.	- Ученички рад (ученици раде индивидуално и у групама и долазе до властитих решења проблема); - Дискусија (наставник ученике дели у групе захтевајући да кооперативним радом дођу до решења новог постављеног проблема).
Звршни део часа	Наставник указује на проблеме из уџбеника, те захтева од ученика да раде задатке из уџбеника.	Наставник представља закључке на постављена питања, те разговара са ученицима о закључцима.

У оквиру РМО приступа де Ланж је говорио о „средњим и вишим циљевима“. Средњи циљ подразумева стицање вештина за решавање једноставних проблема, док виши циљ указује на развој вештина резоновања, комуникације и критичког мишљења (de Lange, према: Романо, 2009б, стр. 16)⁴.

План организације и спровођења наставе путем РМО приступа темељи се на доброј припремљености наставника за такав подухват. Осим што има улогу организатора, наставник мора свесно преузети и улогу мотиватора, водича и евалуатора (de Lange, 1996; Gravenmeijer, 1994). С обзиром на процес прогресивне математизације наставник у оквиру РМО има следећу улогу:

- „Припремити и дати ученицима један контекстуални проблем у вези са планираном за обраду наставном темом, као полазну тачку;
- Дати ученицима путоказ, пишући на табли, или давајући индивидуалне инструкције ако су ученици подељени у групе, уколико им таква помоћ треба у току почетних активности;

⁴ Де Ланжову поделу циљева у РМО можемо донекле поистоветити са стандардима постигнућа у Републици Србији који се манифестују кроз три нивоа: основни ниво, средњи ниво и напредни ниво (Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, 2011).

- Стимулисати ученика да, кроз међусобну вођену (и контролисану) комуникацију, упоређују њихове резултате. Подстицати дискусију - у циљу интерпретације ситуационих приступа датог контекстуалног проблема, уз фокусирање адекватности и ефикасности понуђених различитих процедура решења проблема;
- Претпоставимо, сада, да су ученици нашли неко решење проблема, то значи да су ученици слободни да обаве истраживање на њиховом властитом нивоу, изграђујући тако своје властито искуствено знање и налазећи скраћени пут, на њихов специфичан начин;
- Дати још један (раније припремљен) проблем, унутар истог контекста“ (Романо, 2009б: 19).

Опет, када упоредимо улогу наставника у реализацији проблемске наставе и у оквиру РМО приступа јасно је да је његова улога истоветна. Како се активности наставника преплићу и допуњују при реализацији оба наведена приступа, ни активности ученика не подлежу одступањима. Дакле, задатак ученика је да покуша самостално да дође до решења проблема путем индивидуално осмишљених стратегија. Ученик ни у проблемској настави ни у РМО приступу не треба да очекује од наставника да ће му указати на неке стандардне процедуре решавања проблема. Једноставно, ученику треба допустити да искаже свој принцип рада, али га претходно добро мотивисати како би пут до решења био регуларан.

1.5. Корелација између проблемске наставе и других наставних система

Како проблемска настава није у могућности да испуни баш сва очекивања које пред нас ставља савремено образовање њена комбинација са осталим наставним системима има полифункционални карактер. Наставни системи који имају одређене заједничке карактеристике са проблемском наставом и комбинација са истом, могу допринети подизању образовног система на виши ниво, а све у циљу давања подршке смисленом учењу применљивом у другачијим ситуацијама и околностима.

С обзиром на чињеницу да наш васпитно-образовни систем располаже са доста наставних система, за потребе нашег рада определићемо се за оне који имају одређени ниво корелације са проблемском наставом. У даљем тексту говорићемо о вези коју проблемска настава остварује са: хеуристичком наставом, програмираном наставом, и пројектном наставом.

1.5.1. Хеуристичка настава

Кад год се проблемска настава не може спровести на часу математике, због њене тежине, захтевности у погледу времена или саме природе математичких садржаја којима није релевантна, увек се може заменити, применом наставног система који има нешто слабију делотворност у смислу остварења циљева савремене наставе математике, а с друге стране и добре ефекте у погледу стицања знања од стране ученика, а то је хеуристичка настава. Овај наставни систем настао је из потребе за иницирањем и увођењем самосталне активности ученика, како би се превазишао утицај предавачке наставе.

Главне смернице за спровођење хеуристичке наставе датирају још из прве половине XX века, а огледају се у следећим захтевима (Kurnik, 2006b:149-150):

- Важно је подржавати и подстицати властито откривање математичке истине од стране ученика. У том смислу избегавати задавање вежби памћења, јер оне делују негативно на његове урођене способности и особине;
- Не пружати ученицима математичка знања у готовом облику. Односно, непохоно је развијати умни рад и умне напоре ученика, а не потенцирати учење напамет;
- Развијати стваралачке способности ученика;
- Захтевати од ученика да самостано уоче правила која ће им помоћи да реши одређени проблем;
- Обавезно је на почетку часа пред ученике поставити проблем, а потом путем прикладних питања водити ученике до решења.

Прегледом захтева које налаже спровођење хеуристичке наставе очигледно је да су сви ти захтеви и део имплементације проблемске наставе о којима је већ било речи. Главна усмерења организована су кроз: повећање активности ученика, развој стваралачког мишљења, подстицај ученика на самостално кретање кроз проблем и смишљање адекватних стратегија за решење истог, као и активирање сложених умних радњи.

Према Пљиној (Polya, 1956) концепцији циљ хеуристичке наставе је истраживање правила и поступака који воде до проналаска и открића⁵. Курник (2006b: 150) истиче главне слабости хеуристичке наставе, а то је заправо оно што овај наставни систем ставља у нижу позицију с обзиром на проблемску наставу: (1) немогућност мисаоног активирања свих ученика; (2) немогућност непосредне комуникације са свим ученицима; (3) отежана комуникација са повученим ученицима чија питања врло често изостају; (4) непотпуна повртана информација. Такође једна од тенденција која хеуристичку наставу ставља у нижи ранг јесте што ученици своја знања стичу уз помоћ наставника, па се ту нарушава важно начело које упућује на неговање самосталности ученика, док у оквирима проблемске наставе самосталност ученика у решавању проблема не сме да изостане.

Међутим, што се тиче предности коју хеуристичка настава остварује у односу на проблемску, огледа се у томе што је њена примена релевантна већем броју математичких садржаја. Кључне разлике између проблемске и хеуристичке наставе засноване су на ставовима Хуторској према којима он не оспорава заједничку оријентацију ова два наставна система, али се и не слаже са чињеницом да ове две врсте наставе могу да се поистовете и изједначе. Он објашњава да је циљ проблемске наставе садржан у савладавању градива помоћу посебних проблема које задаје наставник, а ученик сам долази до решења. Хеуристички приступ проширује могућности проблемске наставе упућујући наставника и ученика да заједно достигну резултате који нису унапред познати. „Хеуристичка настава доводи до промене не само ученика него и учитеља који морају да организују наставни процес и када „не знају“ одговор“ (Хуторској, према: Вилотијевић и Вилотијевић, 2016: 153).

На основу свега реченог можемо извести закључак да је корелација између хеуристичке и проблемске наставе извесна и да се комбинацијом ова два наставна система могу остварити бројни захтеви које пред нас ставља савремено образовање.

⁵ Поља (Polya, 1964) велики значај придаје принципима хеуристике које је битно испоштовати при реализацији овог наставног система. Принципи које он посебно издваја су: принцип рационалности, негораничености и економичности и принцип истраживања и примене.

С тога је веома важно упознати се са повезаношћу ова два система, јер као што смо већ нагласили, постоји доста математичких садржаја који су својствени хеуристичкој настави, а немогуће их је реализовати кроз проблемску наставу.

Према TIMSS истраживању 1995, 1999, и 2003. године Сингапур је заузео прво место, док му је у PISA тестирању 2009. и 2012. године, припало друго с обзиром на постигнућа која су ученици остварили у настави математике. С тим у вези врло брзо је откривено у чему лежи тајна успеха сингапурских ученика. Дакле, реч је о систему рада према коме се ученици од свог најранијег узраста баве текстуалним математичким задацима, кроз уочавање и решавање њихових проблема. Другим речима, сингапурска математика користи хеуристички приступ приликом решавања проблема. Осим наведеног приступа, доброј котизацији на тестирању допринео је и проблемски приступ који се такође спроводи у сингапурским школама.

Зато можемо рећи да је „сингапурска математика тип проблемске наставе у којој се ученици воде постепено до решења проблема, непрестано враћајући се на текст задатака“. Акценат је стављен на детаљно читање текста задатка са анализом и представљање датог проблема одговарајућим моделима (Сеничић и сар., 2017: 2).

1.5.2. Програмирана настава

Како би се и даље ишло путем превазилажења предавачке наставе, после хеуристичке наставе настаје наставни систем који подразумева логичко структурирање наставог садржаја уз одбацивање небитних, а задржавање важних елемената уз декомпозицију целовитог математичког садржаја на његове структуралне чиниоце. Према Вилотијевићу (1999) програмирана наставу чине „садржаји сведени на оно што је битно, логички структурисани на мање делове, уређени по сложености, које сваки ученик самостално, постепено савлађује сопственим темпом, са могућношћу сталне контроле свог напредовања“ (стр.269). „Овај наставни систем се ослања на позитивне карактеристике хеуристичке наставе, само што уместо наставника (као што је у хеуристичкој настави) у програмираној настави ученик се мисаоно-логички води програмираним материјалом до схватања и усвајања“ (Касумовић и Мусић, 2010: 143).

Скинер (Skinner, према: Симић, 2015) као зачетник програмиране наставе наводи основне карактеристике које је одликују:

1. Одбацивање небитних, а задржавање битних својстава;
2. Рашчлањавање наставног садржаја на мање делове (секвенце) који се морају усвојити у потпуности;
3. Руковођење принципом од лакшег ка тежем приликом усвајања знања;
4. Примена усвојених знања у практичним ситуацијама;
5. Добијање повратне информације.

Ако бисмо извршили компаративну анализу кроз одреднице програмиране и проблемске наставе јасно је да се све наведене карактеристике програмиране наставе садрже и у проблемској настави. Основни појмови са којима се сусрећемо у домену програмиране наставе су: „програм, тема, секвенца, чланак (корак, порција, доза), алгоритам“. Да бисмо се ближе упознали са програмираном наставом објаснићемо значај сваког од наведених појмова.

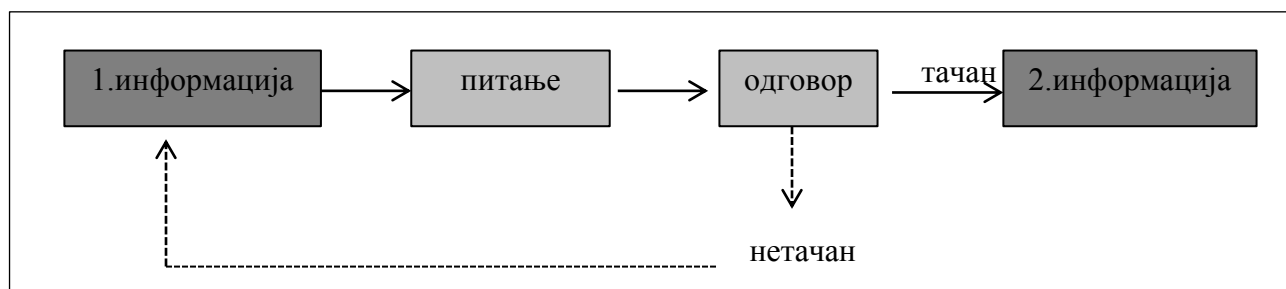
Дакле, програм у оквиру овог наставног система не сме се поистовети са класичним наставним програмом, јер програм о коме је овде реч више је кибернетичког типа и у њему се налазе сви важни појмови и елементи које ученици треба да савладају. У подручју овог програма налази се наставни садржај који је подељен на мање целине, где се целине усвајају једна за другом. Тему чини „садржајна логички структурисана целина из наставног програма“ (нпр. једначине). Секвенца је „логички структурисан део теме“ (нпр. једначине са непознатим умањеником). Чланак (корак, етапа) је „најмања јединица у програмираној настави а чини је основна садржајно-логичка целина коју ученик треба да савлада у процесу решавања неког задатка. Савладавање те најмање целине је незаобилазан услов (корак) да се савлада нови чланак и тако редом до коначног и успешног решења задатка“.

Сваки чланак садржи:

- уводну информацију којом се ученик обавештава о новом градиву и поставља му се основа за наредни задатак;
- проблем који треба да се реши;
- простор где треба решити задатак;
- повратну информацију коју ученик може да погледа тек након решеног проблема.

Алгоритам у својој садржини чини образац или упутство са тачно утврђеним редоследом операција који треба испоштовати да би се постављени проблем тачно решио (Вилотијевић и Вилотијевић, 2016:68).

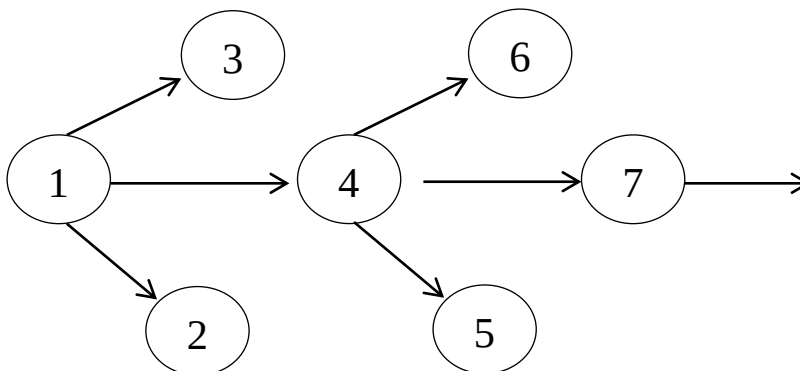
С обзиром на моделе програмирања који су заступљени у овом наставном систему представимо два кључна, а реч је о линеарном и разгранатом програму. Стваралац линеарног програма је Скинер (Skinner, 1954) који садржи чланке у праволинијском низу, где се учење одвија корак по корак. Одговори у оквиру овог програма нису понуђени тако да ученици морају уложити одређене мисаоне напоре како би дошли до решења. Оваква активност делује на ученике подстицајно и утиче на активизацију најложенијих мисаоних процеса. Следећи приказ представља шему линеарног модела.



Слика 3. Линеарни модел програмирање наставе према Скинеру

Путем линеарног модела ученик не сме прескакати кораке, док је свака нова информација и нови корак. Уз помоћ датих информација ученик ће савладати постављена питања и решити задате проблеме. Главни недостатак оваквог програма јесте изостанак додатних информација које су појединим ученицима неопходне како би решили дати проблем. Добра страна овог програма јесте то што сваки ученик може да напредује сопственим темпом, с обзиром на индивидуалне могућности и способности (Симић, 2015).

Творац разгранатог модела је Краудер (Crowder, према: Симић, 2015) који суштину овог модела објашњава на следећи начин: „Грађу коју мора научити – ученик добија у малим логичким јединицама. Чим прочита и усвоји једну такву јединицу, подвргава се малом испиту. Према резултатима тога испита, одлучује се о чему ће се информисати у следећем чланку програма. Уколико ученик није задовољио критеријуме програма за наставак учења, биће му понуђена допунска обавештења и допунски задаци с једноставнијим тумачењем истог градива, након чијег би решавања требало да разуме програмирану секвенцу и настави учење испрограмиране наставне грађе“ (Crowder, 1960: 724). Шематски приказ разгранатог програма приказан је на следећи начин.

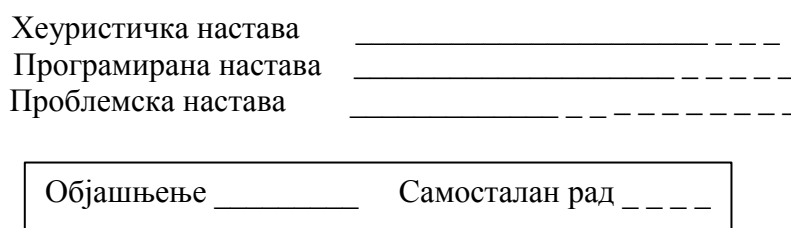


Слика 4. Разгранати модел програмиране наставе (Вилотијевић, 1999:272)

Оваква врста програма отклања недостатке линераног програма пружајући индивидуализацију и диференцијализацију наставног садржаја. Мана коју разгранати програм показује у односу на линеарни огледа се у томе што мисаона активност ученика стагнира, јер ученици не решавају задатке него бирају решење из оквира понуђених.

Јасно је да веза између програмиране и проблемске наставе постоји, посматрајући врсте модела програма и његове карактеристике видимо да постоји доста подударности са етапама проблемске наставе. Представљене шеме нас подсећају на један тип декомпозиције проблема, затим на увиђање веза између делова проблема и целокупног проблема, као и на то, ако ученик добије нетачно решење мора се вратити на почетак проблема те модификовати постојећу или разрадити нову стратегију која ће га довести до исправног решења.

Пошто је главни недостатак програмиране наставе запостављање развоја стваралачког и критичког мишљења, дошло се до закључка да је неопходно створити нови наставни систем који ће се градити на основама претходног (програмиране наставе) а у исто време пружити могућност развоја критичког и стваралачког мишљења. Такав наставни систем био је проблемска настава. Илустративна представа корелације између хеуристичке, програмиране и проблемске наставе представљена је следећом сликом, а осмислио ју је Терхарт (Terhart, 2001: 159).



Слика 5. Илустрација компаративне представе хеуристичке, програмиране и проблемске наставе

Слика коју смо представили јасно истиче ниво заступљености објашњења које наставник пружа ученику, односно ниво самосталне активности ученика кроз споменута три наставна система. Очигледно је да највиши ниво самосталног рада, што у себи садржи и активизацију сложених мисаоних процеса од стране ученика, поседује проблемска настава. Док у програмираној и хеуристичкој настави пружање информација ученицима од стране наставника има доминанту улогу.

С тим у вези оправдано се показало као недостататк програмиране и хеуристичке наставе изостанак развоја стваралачког начина размишљања, јер док се ученик максимално самостално не активира и не уложи потребне мисаоне напоре нема ни развоја мишљења. С тога је проблемска настава преузела елементе хеуристичке и програмиране, отклонила њихове недостатке, извршила модификацију појединих процеса учења и изградила један ефикасан наставни систем који одговара циљевима савременог образовања.

1.5.3. Пројектна настава

Пројектна настава представља наставни систем који датира још од почетка XX века, чији је утемељивач био амерички филозоф и педагог Џон Дјуи, а даљи заступник био је његов ученик В. Х. Хилпатрик. Њихова теорија се борила против унапред утврђених шема у наставном процесу, а залагала се за допринос који школа треба да пружи развоју потенцијала којима ученик располаже (Мандић и Вилотијевић, 2017).

Борећи се са разним критикама и победивши све несугласице које су владале међу теоретичарима приликом оформљивања овог наставног система Вилотијевић и Вилотијевић (2010) истичу да је уложено доста труда и напора да се пројектна настава усагласи са конвенционалним методама наставе. Два су кључна разлога која су одговорна за настанак овог наставног система. Први се објашњава кроз револуцију која се догодила у теоријама учења, које су имале за циљ да оснаже везе између мишљења и знања, јер се сматра да знање не може настати, а потом и ни опстати уколико се не активирају мисаони процеси и напори. Други разлог који је условио изградњу и опстанак пројектне наставе у вези је са вртловим прогресом науке и технологије, који јача из дана у дан и захтева од школа да ученике прилагоди најновијим достигнућима. Најновија истраживања су у складу са чињеницом да пројектна настава прати друштвене промене, да је усмерена на остваривање постављених циљева, стандарда и исхода, те да се фокусира на развој активности планирања и истраживања (Thomas, 2000).

Програм наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања (2018) пројектну наставу третира као наставни систем који у потпуности може остварити образовне стандарде и исходе XXI века, док у исто време „прати друштвене промене својом усмереношћу на развијање знања и способности ученика кроз активности планирања, истраживања и тимског рада у оквиру предметног и међупредметног повезивања садржаја“ (стр. 48). На самом почетку већ видимо чврсту корелацију која влада између пројектне и проблемске наставе у смислу формирања. Сам зачетак и процес развијања оба наставна система својствени су тенденцијама савременог образовања.

Многа литература сведочи о томе да се пројектна и проблемска настава врло често поистовећују, међутим разлике ипак постоје. Да бисмо боље разумели, с једне стране сличност, а с друге стране разлике између ова два наставна система објаснићемо најпре везу између проблема, истраживања и пројекта. Матијевић (2008) бавећи се овом проблематиком своје виђење повезаности наведених елемената представља на следећи начин: „(1) Када је битно решити проблем или оспособити ученике за његово решавање, тада је реч о проблемској настави, а коришћено истраживање и за његове потребе израђени пројекат, биће у служби решавања проблема; (2) Ако хоћемо ученике да оспособимо за истраживање, тада ће проблем и пројекат истраживања бити у његовој служби и знаћемо како да спроведемо истраживачку наставу; (3) Ако желимо ученике оспособити за организовање и вођење пројекта, тада ће истраживање и пројекат због којег истражујемо бити у служби пројекта и јасно ћемо знати како да изведемо пројектну наставу“ (стр.196). „Пројектна настава има елементе проблемске и истраживачке наставе који се односе на тражење решења за неки проблем кроз тимски рад и коришћење савремених технологија. Заједничко им је то што се предност даје процесу рада и сарадњи наспрам самих резултата“ (Правилник, 2018:93). Емпиријско истраживање које је реализовано са 62 ученика шестог разреда у школама у Америци које су спровели Мур и сарадници (Moore et al., према: Barron et al., 1998) показало је да имплементација проблемске наставе има велики значај у пројектном моделу рада.

Чижмешаја (2006) ученички математички пројект посматра као рад групе ученика на једном сложеном математичком проблему. Он као основу у учењу математичких процедура види решавање проблема. Док ученик решава проблем ослања се на своја претходна знања и искуства, те уз помоћ њих проналази методе које му помажу и воде пут решења. При спровођењу пројектне наставе врло је важно истаћи улогу проблемске наставе која јој пружа одређену потпору и подршку. Барон са сарадницима (Barron et al., 1998) истиче да мисаони напори ученика у пројектном раду треба да буду прво поткрепљени проблемским учењем, па тек онда треба наставити са пројектом.

Као што смо проблемску наставу повезали са реалистичним математичким образовањем (РМО), сличан однос са РМО има и пројектна настава. Док ученици раде на изради пројекта и примењују своје истраживачке активности како би решили постављени проблем, појављује се смисао за развој одређених научних принципа и правила. Овакав вид учења ставља ученика у реалистичан простор за решавање проблема. С тим у вези пројекат гради везу између појава и активности које се одвијају у учионици са искуствима ученика из реалног животног окружења (Blumenfeld et al.,1991).

Када је у питању реализација и спровођење пројектне наставе јасну слику целокупног одвијања тог процеса дају Мандић и Вилотијевић (2017) кроз следеће етапе:

- Изабрати актуелни проблем, такав да има практични значај и да у вези са њим ученици поседују одређено искуство.
- Наставник заједно са ученицима утврђује пројекат решавања проблема. Улога наставника је да омогући ученику да изнесе што више својих ставова у вези са решавањем проблема, потом да их усмери на прави пут, допуни њихове идеје и да их на крају уобличи.
- Пројекат је могуће реализовати кроз различите облике рада. Може то бити: групно, индивидуално или рад у пару. Након одабира адекватног облика рада ученици се усмеравају на прикупљање података који су им неопходни за решавање проблема који се пред њима налази.
- Када се подаци прикупе, неопходно је извршити њихову анализу и утврдити узрочно-последичне везе које владају међу њима. Потом је могуће изводити закључке. Добијени резултати могу бити у форми: цртежа, скице, табеле, слајда итд.
- Завршну етапу одликује примена добијених резултата у пракси.

Кукушин (Кукушин, према: Мандић и Вилотијевић:137) даје табеларни приказ о току имплементације пројектне наставе. Након представљене табеле извршићемо поређење са поступком реализације проблемске наставе.

Табела 5. Фазе у спровођењу пројектног модела наставе

Фазе наставне активности	Активност наставника	Активност ученика
Избор и разрада пројектног задатка		
Избор теме	Наставник, заједно са ученицима, предлаже теме	Ученици расправљају и, заједно са наставником, бирају тему
Разлагање теме на подтеме	Наставник предлаже подтеме и предлаже ученицима да бирају. Наставник и ученици воде расправу о подтемама	Сваки ученик бира подтему или предлаже нову. Ученици расправљају и предлажу варијанте подтема.
Формирање стваралачких група	Наставник обавља организациони део и формира групе по изабраним подтемама	Ученици међу собом деле улоге ради успешније реализације добијеног (изабраног) задатка
Припрема материјала за истраживачки рад:	Ако је пројекат обимнији, наставник унапред разрађује задатке.	Ученици прихватају обавезе у изради задатка.

формулисање питања, задаци за екипе, избор извора		
Одређивање облика презентације резултата пројектне активности	Наставник учествује у расправи	Ученици у групама, затим у одељењу расправљају о облицима за презентовање резултата истраживачке активности: видеофилм, албум, извештај, табеларни прегледи
Разрада пројекта	Наставник усмерава рад ученика и подстиче њихову активност	Ученици истражују према унапред утврђеним питањима
Сређивање резултата	Наставник упућује ученике како да среде резултате	Ученици прво у групама, а затим у одељењу сређују резултате према прихваћеним правилима
Презентација	Наставник организује стручну процену (позива стручњаке, родитеље или најбоље ученике) да процене рад о коме су ученици поднели извештај	Ученици извештавају о резултатима свога рада
Рефлексја	Наставник оцењује педагошки ефекат свога рада	Ученици оцењују читав процес и своју улогу и допринос њему

Прва етапа пројектне наставе огледа се у избору и разради пројектног задатака, што у проблемској настави замењује стварање проблемске ситуације и формулисање проблема који се ставља пред ученика. Улога наставника и ученика је у оквиру прве фазе реализације у оба наставана система је истоветна. Другу етапу пројектне наставе карактерише разрада пројекта у оквиру које ученици самостално истражују и долазе до података које анализирају и систематизују (Munjiza,2007). У овој фази наставник ученике подстиче, усмерава и даје адекватну потпору како би регуларним путем дошли до решења проблема.

С друге стране у проблемској настави врши се формирање хипотеза и декомпозиција проблема, такође уз подршку наставника по принципу пружања минималне помоћи. Трећа фаза пројектне наставе резрвисана је за сређивање резултата до којих су ученици дошли након прикупљених података и можемо је донекле поистоветити са етапом решавања проблема у домену проблемске наставе. Да би се дошло до адекватног решења проблема морају се најпре средити и анализирати добијени резултати. Четврта фаза пројектне наставе огледа се у презентацији где ученици дају извештаје у вези са резултатима до којих су дошли. Паралелно са овом фазом у проблемској настави одвија се анализа резултата, извођење закључака и генерализација. Целокупна анализа резултата и закључци осим што се могу изложити усмено, то се може реализовати и помоћу разних плаката, табела, видео-записа и сл., што је својствено пројектној настави. Завршна фаза пројектне наставе подразумева рефлексiju, где се врши вредновање целокупног рада, те у вези с тим Даутова са сарадницима указује на следеће захтеве које треба посебно размотрити: „(1) да ли је пројект занимљив на стваралачком и истраживачком плану и да ли захтева интегрисана знања; (2) да ли остварени резултати имају практичну, теоријску и сазнајну вредност; (3) да ли су ученици самостално дошли до резултата; (4) да ли су у извештају наведени резултати по етапама; (5) колико су и како у реализацији пројекта коришћене истраживачке методе“ (према: Вилотијевић и Вилотијевић, 2010:42). Ову етапу пројектне наставе карактерише и слабост која се огледа у немогућности наставника да ваљано вреднује рад сваког појединца, па је ова фаза врло често велики изазов за наставнике.

Завршну фазу у проблемској настави карактерише практична примена нових знања и врши се утврђивање доприноса који та знања пружају наставној теорији и пракси. На основу свега реченог, заступамо став да су пројектна и проблемска настава у изузетном корелативном односу, те је то потребно уважити, поштовати и искористити, јер заједно ова два система чине једну складну целину која је у потпуности прилагођена остваривању циљева које налаже савремено учење.

2. Математичко моделовање

Савремена настава математике подразумева остваривање прописаних циљева који се огледају у развоју креативности и стваралаштва сваког ученика. Флексибилност мишљења, флуентност идеја и осетљивост за проблеме, одреднице су стваралачког начина размишљања и уједно су део структуре математичког моделовања. Ако бисмо пажњу посебно посветили свакој наведеној детерминанти крећући се кроз садржаје у почетној настави математике, успешно бисмо остварили или пак, били на добром путу да остваримо предвиђене циљеве (Zech, 1999).

Идеја о употреби математичког моделовања јавља се средином седамдесетих година чији је конструктор био Барето (Aristides C. Barreto), који је креирао моделе у сврху решавања математичких проблема (Doosti & Ashtiani, 2009). Идући путем математичког моделовања ученици ће успешно сагледати математичке структуре, потом ће извршити транслирање проблема из реалног света у математички проблем, те ће извршити апстраховање реалног проблема (Gravemeijer & Stephan, 2002).

Наставни програм математике Републике Србије за први циклус основног образовања и васпитања математичко моделовање посматра као један од циљева наставе математике. Дакле, циљ наставе математике у основној школи јесте:

„да ученици усвоје елементарна математичка знања која су потребна за схватање појава и зависности у животу и друштву; да оспособи ученике за примену усвојених математичких знања у решавању разноврсних задатака из животне праксе, за успешно настављање математичког образовања и за самообразовање; као и да допринесе развијању менталних способности, формирању научног погледа на свет и свестраном развоју личности ученика“ (Правилник, 2005, стр. 38).

Милинковић (2014) бавећи се математичким моделовањем јасно истиче да је основни циљ „стварање модела чијим проучавањем ће се омогућити уочавање правилности и односа који важе на моделу, а тиме и код оригиналног феномена“ (стр.46). Грир математичко моделовање посматра као нешто што повезује „две стране математике прву – утемељеност математике у стварности и другу – поље њеног интересовања су апстрактне структуре“. Он такође математичко моделовање повезује са проблемском наставом, наглашавајући да се налазе у нераскидивој вези, што би значило да проблемска настава не би у потпуности показала своје предности без развоја ове способности (Greer, према: Милинковић, 2014:45). Математичко моделовање обухвата и процес математизације који подразумева кретање из реалне у математичку област. О процесу математизације било је раније речи, тако да ћемо се у овом одељку ограничити само на суштинске елементе.

Барбосино (Barbosa, 2002) виђење математичког моделовања заснива на окружењу у коме ученици испитују или истражују, посредством математике, проблеме и ситуације које настају у другим областима знања. Он истиче да је разумевање и формулисање одређеног проблема најефектније у ситуацији када се изврши интегрисање математичких знања са процесом математичког моделовања.

Моделовање пружа велики допринос настави математике у смислу максималног активирања ученика, те је кључна претпоставка многих аутора (Verschaffel et al., 2000; Novotná and Rogers, 2003; Novotná and Sarrazy, 2005) у процесу решавања задатака. С тим у вези, како бисмо се боље упознали са овом способношћу у даљем тексту операционализоваћемо сам појам математичког моделовања, потом говорићемо о његовим битним одредницама, размотрићемо битне фазе које га одликују у почетној настави математике, те ћемо се упознати са његовом улогом и значајем при имплементацији проблемске наставе.

2.1. Појам и основне детерминанте математичког моделовања у почетној настави математике

Како бисмо у потпуности разумели процес математичког моделовања кључно је прво дефинисати појам „модел“. Петровић, Мрђа и Ковачевић (2004) истичу да се појам „модел“ темељи на латинској речи „modulus“ чије је основно значење „мера“. С обзиром на подручје на које се односи појам „модел“ има вишезначни карактер што подразумева: шаблон, образац, релацију, алгоритам и сл. Позивајући се на све наведене форме модела, исти аутори наводе да „под моделом треба разумети поједностављујући приказ једне компликоване структуре и њене функционалне везе“ (стр.113).

Модел се може описати и као покушај да се направи аналогија између непознатог система и раније познатог система. Сходно томе, ученици схватају ситуације из стварног живота и интерпретирају их помоћу модела (Lehrer & Schauble, 2003). С обзиром на становиште са ког се модел дефинише он може бити и скуп једначина које се користе за рачунање просторно-временске еволуције физичког система (Bellomo & Preziosi, према: Velten, 2009).

Међутим, бројни проблеми не могу се сагледати кроз просторно-временско подручје, те је било потребно изградити дефиницију која покрива све врсте математичких модела који се у науци примењују. Рецимо, математички модел тројке (S, Q, M), према којој S одликује систем, Q питање које има везе и односи се на S, а M представља неколико математичких исказа $M = M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$, који се користе како би се решио Q (Velten, 2009). Према теорији Дира и Инглиша (Doerr & English, 2003) појам „модел“ сагледан је као „систем елемената, операција, релација и правила који се могу користити за описивање, објашњавање, или предвиђање понашања проучаваног система“ (стр.112).

С тим у вези Милинковић (2014) модел посматра као математичке формуле и симболе који имају задатак да изразе односе и везе између посматраних објеката. Модел се може дефинисати и као систем концептуалних елемената који се користе за конструисање, описивање и тумачење одређених математичких ситуација (Richardson, 2004). Тервел и сарадници у моделу виде „одређени структурални облик репрезентације“ где је репрезентација шири и свеобухватнији појам из когнитивне психологије, а модел појам који се користи у математичком образовању (Terwel et al., 2009: 27). Међутим, поједини аутори модел схватају као репрезентацију задатка који се сачињава и формира, с циљем сумирања и разумевања суштине задатка (Novick & Bassok, 2005).

Математички модели фокусирани су на структурне особине и функционалне везе објеката или ситуација у стварном животу (Lehrer & Schauble, 2003, 2007; Lesh & Doerr, 2003). „Математички модел је формални математички запис који одсликава аспекте проучаваног феномена често у форми графика, једначине или алгоритма“ (Милинковић, 2014: 46). Такође, математички модел може бити и у форми дијаграмског приказа (Galbraith & Stillman, према: Barbosa, 2006). Модел служи као средство за посредовање између стварног и апстрактног света математике. Другим речима, модели помажу ученицима да реше проблем на сваком нивоу апстракције (Милинковић, 2016). Како говори Ван ден Ховел-Панхуизен (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000), модели омогућавају премошћавање јаза између неформалног и формалног математичког система.

Проучавајући основне одлике и својства модела Новотна (Novotná, 1997) објашњава да модел најпре мора да:

- буде једноставан и јасан;
- активира мисаону активност ученика;
- визуализује апстрактне информације из задатка;
- буде довољно флексибилан да омогући лаку модификацију различитих проблема у групи сличних проблема.

Модел имају значајну улогу при развоју интелектуалних способности ученика, јер се пројектују посредством различитих мисаоних операција као што су: анализа и синтеза, апстракција и конкретизација, индукција и дедукција, упоређивање и аналогија (Пинтер, 1997). Модел у наставном процесу доприноси: (1) интеграцији знања; (2) овладавању и утврђивању усвојених знања; (3) откривању нових идеја које тек треба разумети и објаснити (Yildirim et al., 2010).

Пошто смо објасни појам модела кроз неколико дефиниција и видели да свака од њих другачије гласи али поседује исту суштину, сада ћемо нашу пажњу усмерити на процес математичког моделовања.

Најпре, упознаћемо се са дефиницијом овог процеса, те сагледати и размотрити његове кључне елементе. Најшире сагледано, моделовање представља процес који започиње одређеном реалном ситуацијом, а завршава се разумевањем исте те ситуације. Уколико се у поступцима разумевања дате ситуације користе математичка искуства, онда је реч о математичком моделовању (Будински, 2013). Ослонивши се на претходно, процес математичког моделовања према Мершерту (Meerschaert, 2010) заправо је веза која постоји између наставе математике и остатка света. Дакле, да би математичко моделовање испољило свој позитиван ефекат важно је за полазну тачку одредити релевантну реалну ситуацију која ће се посредством математичког језика преточити у математичку ситуацију, док ће се уз помоћ одговарајућег модела тражити решење постављене ситуације (Будински, 2013).

Петровић, Мрђа и Ковачевић (2004) наводе да је математичко моделовање „мисаоно-теоријска делатност изградње логичких и математичких система, као теоријских модела одређених објективних система. Математичко моделовање је такође изградња овим теоријским моделима одговарајућих практично – реалних аналога, тј. реалних модела разних врста“ (стр.113-114).

Процес математичког моделовања не заснива се на типичним „проблемима са речима“ већ је примерен аутентичним реалним ситуацијама које је потребно интерпретирати и описати математичким језиком (Lesh & Harel, 2003). Модел је врста производа, а моделовање чини низ поступака који учествују у стварању симболичких или апстрактних модела ослањајући се на реалне ситуације, које су дате у форми математичких задатака (Erbaş et al., 2014).

„Математичко моделовање је сложен процес превођења одређеног проблема у математичку форму“ (Милинковић, 2014: 46). Оно почиње упознавањем ученика са реалним проблемом из живота, потом ученици анализирају проблем и стварају план за његово решавање, те након свега посредством модела који су развили приказују резултате и износе закључке до којих су дошли. Према Блуму (Blum, 1994) математичко моделовање представља активност креирања модела који чини пут од реалне ситуације блиске ученицима до математичког модела, потом то је и један вид решавања проблема или уопштено речено то је свака врста везе између реалистичног и математичког света.

Вотерс и сарадници (Watters et al., 2000) математичко моделовање сагледавају као процес у коме ученици идентификују основне математичке структуре комплексних феномена. „Резултат математичког моделовања је стварање математичког модела или репрезентације феномена или проблема, који довољно верно одсликава карактеристике и релације оригиналног феномена са одговарајућег аспекта“ (Милинковић, 2014: 46).

Пинтер (1997) истиче да су „задатак и циљ моделовања одражавање стварности предмета, појмова и релација који су човеку ближи, познатији од оних које истражује и доприносе потпунијем сазнању стварности. Моделовање се заснива на аналогiji и на дијалектичком закону о међусобној повезаности појава. Основна улога модела је да замени предмет истраживања који му на неки начин одговара и да даје нове информације о њему“ (стр.11). Као што видимо сви аутори процес математичког моделовања посматрају као пут који је саткан математичким правилима и елементима, чија је круцијелна улога превођење феномена из реалног света у апстрактни свет математике. Математичко моделовање представља темељ модерне науке и целокупног васпитно-образовног процеса, те је као такво својствено и другим областима као што су биотехнологија, информатика, инжињеринг и сл. (Gainsburg, 2006).

Да бисмо успешно развијали способност математичког моделовања неопходно је да се упознамо са циљевима који га детерминишу. Дакле, представимо четири димензије у којима се огледају циљеви математичког моделовања (Kaiser, 1995):

1. Педагошки циљеви. Односе се на развој способности које ученицима пружају могућност да боље и уверљивије сагледају основне карактеристике света који их окружује.
2. Психолошки циљеви. Усмерени су на неговање и унапређивање мотивације ученика и развој позитивних ставова према настави математике.
3. Предметни циљеви. Подразумевају структурирање процеса учења, усвајање нових математичких поступака и метода, изградњу релевантних стратегија и представљање усвојених алгоритама у графичком и илустративном смислу.
4. Научни циљеви. Ову врсту циљева одсликава преношење реалистичних представа у свет математике и повезаност математичких проблема са проблемима из другачијих области.

Класификација моделовања је могућа са различитих аспеката. Рецимо, сходно природи задатака моделовање може бити: (1) реалистично или примењено, (2) контекстуално, (3) образовно, (4) епистемолошко или теоријско, (5) социокритичко и (6) когнитивно (Kaiser, 2006; Kaiser & Sriraman, 2006). Почетна настава математике највише тежи и захтева примену и развој реалистичног моделовања, најпре због његових фундаменталних одредница које се односе на применљивост знања у различитим ситуацијама, а потом и због чињенице што је проблемска настава структурални део реалистичног математичког образовања. Кроз наредну табелу приказаћемо разлике између претходно наведених врста моделовања, с обзиром на основни циљ који га промовише.

Табела 6. Разлике између врста моделовања с обзиром на циљеве (Kaiser & Sriraman, 2006)

Врста моделовања	Основни циљ
Реалистично (примењено)	Прагматичко - утилитарни: разумевање и решавање проблема из реалног света, промовисање моделовања као базичне способности.
Контекстуално	Психолошко - предметни: решавање проблема речима.
Образовно: (а) дидактичко; (б) концептуално;	Педагошко - предметни: (а) структурирање и унапређвање процеса учења; (б) увођење и развој концепта.
Епистемолошко	Педагошки: развој критичког мишљења.
Социкритичко	Теорисјки оријентисани циљеви: промоција и развој теорије.
	Истраживачки циљ: развој и анализа когнитивниг процеса који настају у процесу моделовања.

Когнитивно	Психолошки циљ: промовисање математичких процеса размишљања применом модела и наглашавање моделовања у контексту развоја менталних способности као што су: апстракција и генерализација.
------------	--

Многи налази у својој основи садрже бројне расправе у вези са узрастом ученика на коме је најприкладније почети са развијањем способности математичког моделовања. Рецимо, Милинковић (2003) је сагласна са чињеницом да математичко моделовање треба практиковати још од најранијег школског узраста, док с друге стране Барбоса (Barbosa, 2006) заступа став да ученике са овим процесом треба уознавати тек на старијем школском узрасту. Вотерс и сарданици (Watters et al., 2000) такође истичу да математичко моделовање своју највећу ефикасност може достићи само у случају ако се оно почне развијати код ученика старосне доби од 8 година, што одговара млађем школском узрасту. Они сматрају да је то адекватан период када ученике треба навикавати да мисле и користе своје умне напоре. Сходно томе Брунер истиче да се „свака идеја може представити поштено и корисно у мисаоној форми деце школског узраста, а те представе се касније могу олакшати на основу ранијег стеченог знања“ (Bruner, према: Стјепановић, 2012: 26). Много је аутора који заступају став да процес математичког моделовања треба започети од основне школе, те га складно и смислено развијати и кроз даље школовање (Carpenter & Romberg, 2004; Lehrer & Schauble, 2003; Jones et al., 2002).

Карпентер и Ромберг су извршили истраживање које је показало да деца на млађем школском узрасту могу успешно да се укључе у процес моделовања и да врше генерализације, што је у традиционалној настави деловало немогуће. Према традиционалној настави процес моделовања био је својствен ученицима у средњој школи. Такође, исти аутори сматрају да укључивање ученика у најранијим годинама у овај процес подстиче ученике на мисаоно ангажовање и математичко расуђивање (Carpenter & Romberg, 2004).

Ми се слажемо са већином аутора и потврђујемо став да је моделовање потребно уводити он најранијег школског узраста, само је целокупан процес потребно прилагодити могућностима и способностима ученика. Ако се од раних година ученици укључе у поступак примене математичког језика у објашњавању реалних ситуација, то ће бити неки вид гаранције да ће у наредним фазама школовања много лакше и сигурније приступати решавању постављених проблема, јер ће се ослањати на претходна искуства.

Да би математичко моделовање испољило своју позитивну улогу у наставном процесу, неопходно је и ангажовање наставника у смислу подстицања и развоја следећих ученичких вештина: (1) тумачење математичких или научних појава и информација које су представљене у облику текста или дијаграма; (2) разумевање, анализа и читање једноставних примера табеларних података; (3) прикупљање, анализа и интерпретирање података; (4) припремање и састављање писаних извештаја на основу анализираних података; (5) комуницирање у групи и заједнички рад на подацима; (6) конструисати моделе са групом путем вербалних и писаних извештаја (Watters et al., 2000). Како би ученици разумели и овладали својствима математичког моделовања важно је да поседују претходно наведене вештине. Врло је битно напоменути да увек треба кренути од представа из реалног живота, које су блиске ученицима и налазе се у домену њиховог опажајног нивоа.

Ако је задати проблем доступан ученику преко стварности, то је добар пут који ће ученику помоћи и да га математички успешно обликује. Ангажовање мисаоних процеса такође не треба изоставити, јер имају кључну улогу приликом разумевања, анализе и интерпретирања података.

Решавање проблема уз помоћ моделовања доводи до интеграције когнитивних и метакогнитивних процеса који имају важну улогу у откривању, стицању и примени знања (Collins, 1987). Према Досту и Аштани (Doosti & Ashtiani, 2009) процес математичког моделовања подразумева да се:

- дефинише и идентификује проблем који ће бити истражен;
- ученици упознају са основним структуралним елементима предстојећег проблема;
- сваки елемент проблема посебно анализира, те да се изврши увиђање односа и веза који владају између тих елемената;
- добијени математички резултати интерпретирају у контексту реалног света;
- изврши процена колико су добијена решења применљива у стварном свету.

Конструисање и формирање математичких модела резултат су креативног и стваралачког односа ученика према датом проблему, док наставник у том процесу игра улогу координатора. Ученици који успешно манипулишу одређеним моделима, показују више интересовања и појачану мотивацију при сусрету са новим проблемским ситуацијама, те лакше и брже усвајају нова знања (Barbosa, 2006). Наставник мора водити рачуна да сваки одабран модел буде примерен узрасту ученика и развојним карактеристикама које ту старосну доб одсликавају.

Ученик мора бити оспособљен најпре да сагледа проблем, потом да га разуме, па тек онда анализира и приступи његовом разрешењу. У целокупном процесу ученик би требало да открива узајамне односе и везе између датих информација, да их разматра и упоређује, јер је то релевантан начин да ученик своја теоријска знања преточи у флексибилна, диференцирана и активна (Watters, English & Mahoney, 2000).

Бројна су истраживања која сведоче о томе да учитељи не поседују довољно компетенција када је у питању поступак спровођења математичког моделовања. Рецимо, Нис, Блум и Гелбрејт (Niss, Blum & Galbraith, 2007) на основу својих налаза тврде да учитељи поседују јако низак ниво компетенција када је у питању математичко моделовање. Према њиховом мишљењу предавач најпре мора да зна оно што предаје, па да у складу с тим осмисли најадекватнији начин уз помоћ кога ће то знање да пренесе ученицима. Пошто је главна тежња ка томе да ученици самостално стварају моделе, да би се тај циљ остварио, најпре наставник мора знати да их ствара и да у свом сазнајном домену располаже са доста различитих врста модела. Потом, Злокапа (2012) наводи да углавном најразвијеније земље улажу у развој математичког моделовања и врло често га примењују у практичним активностима. Процес моделовања захтева подстицање различитости и оригиналности, док, с друге стране подразумева висок ниво математичких знања и квалификација од стране наставника.

Стјепановић (2012) истиче да учитељи не познају довољан број примера моделовања који су релевантни постављеним ситуацијама, па се ученицима намећу модели који нису у складу са њиховим узрастним карактеристикама.

2.2. Улога и значај математичког моделовања у контексту проблемске наставе

Увођење процеса математичког моделовања у почетну наставу математике налази се у домену бројих истраживања у којима је потврђен његов позитиван утицај (English, 2003; English & Watters, 2004). Пошто смо констатовали да ученици млађег школског узраста поседују предиспозиције за развој ове способности, неопходно је истаћи да је то уједно и темељ на коме ће се вршити надоградња моделовања у наредним разредима школовања (Blum & Niss, 1991; Doerg & English, 2003). Правилник за други разред основног образовања и васпитања (2018) јасно истиче да је циљ наставе и учења математике да ученик:

„овладавајући математичким концептима, знањима и вештинама, развије основе апстрактног и критичког мишљења, позитивне ставове према математици, способност комуникације математичким језиком и писмом и примени стечена знања и вештине у даљем школовању и решавању проблема из свакодневног живота, као и да формира основ за развој даљих математичких појмова“ (стр. 72).

Као што видимо споменути правилник који се примењује од школске 2019/2020. године препознаје позитивне ефекте проблемске наставе којој је један од циљева развој критичког и стваралачког мишљења, а основни значај садржан је у могућности примене стечених знања у новим ситуацијама, са математичким моделовањем, које има велику улогу у решавању проблема из свакодневног живота.

Према Правилнику о програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања (2019б) „решавање задатака у реалистичним и проблемским ситуацијама је контекст (...) за развој способности математичког моделовања. Проблеми се задају у текстуалној форми, сликом, табелом или графиком (стр. 40)“.

Према Марковићу (2011) значај развоја способности математичког моделовања у почетној настави математике посматра се кроз следеће области: (1) прагматичну, (2) формативну, (3) културолошку и (4) психолошку. Посматрано кроз прву област, значај моделовања се огледа у успешном суочавању ученика са разноврсним реалним ситуацијама и проблемима. Друга област подразумева развој базних компетенција ученика у смислу решавања проблема и отворености ка новим проблемским ситуацијама. Према културолошкој области значај математичког моделовања огледа се у процесу математизације где је потребно прећи из реалног света културе и историје у свет математичких симбола и формула. Различити модели врло често у настави математике представљају наставно средство који имају мотивациону улогу, што доприноси одржавању ученикове пажње и лакшем разумевању апстрактних математичких структура, те је одраз психолошке области.

„Да ли би требало да упознајемо математичке моделе и затим их примењујемо у решавању проблема или би (обрнуто), требало да постављамо проблеме који би нас водили откривању математичких модела?“ (Servais & Varga, према: Милинковић, 2011: 53). Моделовање у настави математике даје бројне подстицаје како би ученици разумели математичке појмове, уочавали чињенице, анализирали и решавали одређене математичке проблеме који су резултат реалних ситуација. Такође, настоји да развије и продуби како креативно тако и критичко мишљење и активира остале мисаоне процесе код ученика, ради бољег и ефикаснијег разумевања појединих математичких концепата.

Посматрано с наше тачке гледишта способност математичког моделовања потребно је развијати кад год су за то услови остварени, јер се на такав начин ученици упознају са различитим репрезентацијама чија је улога драгоцену у резонувању проблема и осмишљавању стратегија које чине пут до решења.

Математичко моделовање је повезано са проблемском методом. Међутим, оно се не своди само на стриктно решавање проблема, већ захтева проналажење низа ситуација које се могу описати и објаснити уз помоћ истог модела (Милинковић, 2014). Вершафел и сарадници (Verschaffel et al., 2000) сматрају да је математичко моделовање у директној вези са одређеном проблемском ситуацијом и описују га као сложен процес са више фаза. У првој фази ученици се труде да разумеју ситуацију која је оличење постављеног задатка како би успели да конципирају ситуациони модел. Потом, у другој фази посредством ситуационог модела приступа се изграђивању математичког модела. Трећу фазу карактерише примена одговарајућих математичких операција које су својствене математичком моделу, с циљем доласка до решења. Најзад, ученици формулишу одговор.

Јасно је да математичко моделовање даје велики допринос савременом приступу настави математике, а да би се та способност ефикасно развијала код ученика неопходна је и подршка учитеља. Учитељ треба да створи такву атмосферу која ће да уважава учениково моделовање, истраживање, расправљање и представљање ученичких метода. Треба да подстиче сталну интеракцију између ученика, као и да сам буде део те интеракције у смислу постављања питања ученицима: Да ли овај проблем може да се реши другачије? Како знаш да је ово решење тачно? Да ли овакав начин решавања даје увек тачане резултате? и сл. (Kaput & Blanton, 2001). Веза која је остварена између математичког моделовања и проблемске наставе протеже се кроз целокупан процес имплементације овог наставног система, од стварања проблемске ситуације која је углавном заснована на реалном контексту, преко решења проблема и примене решења у новим ситуацијама. Табела према којој се може видети испреплетаност између проблемске наставе и математичког моделовања могла би изгледати овако:

Табела 7. Преклапање фаза математичког моделовања и проблемске наставе

Проблемска настава		Процес математичког моделовања
ФАЗЕ СПРОВОЂЕЊА	1. Стварање проблемске ситуације	1. Реална ситуација 2. Реалан проблем 3. Математички проблем
	2. Формирање хипотеза	4. Математичко решење
	3. Декопозиција проблема	
	4. Решавање проблема	5. Решење реалног проблема
	5. Анализа резултата	6. Прихватање/одбијање модела – провера решења
	6. Практична примена знања	7. Писање извештаја

Развијена способност ученика да манипулишу различитим репрезентацијама и да их искористе у тренутку сусрета са неком новом проблемском ситуацијом „сматра се пресудном у поступцима решавања проблема“ (Обрадовић и Зељић, 2015: 72). Када ученици у свом дијапазону поседују широк избор репрезентација, пружа им се могућност да постављени проблем сагледају са различитих становишта. С тим у вези уколико су ученици оспособљени да правилно бирају и изграђују репрезентације, они на тај начин граде математичка знања која их наводе да ефикасно сачињавају стратегије и решавају нове проблеме (Di Sessa, 2002). Уколико је правилно и ефикасно осмишљена проблемска ситуација ученици се на неки начин охрабрују да откривају и стварају нове и апстрактније моделе, који ће им послужити као средство у решавању проблема (Doorman & Gravemeijer, 2009).

Марковић (2011:36) говори о једноставном моделу уз помоћ кога се може приступити решавању одређеног проблема. Дакле, полазна основа је ситуација која одговара стварном (реалном) свету и налази се изван подручја математике. Битно је да проблемска ситуација буде поједностављена од старне ученика што доводи до „стварног модела ситуације“. Потом је потребно тај модел спровести кроз процес математизације како би настао „математички модел“ оригиналне ситуације. Понекад се може догодити да различити модели одговарају једној проблемској ситуацији. Тада се мора извршити избор оног модела за који се сматра да је најпригоднији. Поступак решавања проблема наставља се кроз математичке алгоритме који стварају резултате. Потом, добијени резултати морају бити доведени у везу са реалним светом, како би били сагласни са оригиналном ситуацијом. Након тога врши се потврђивање и прихватање математичког модела. Једна од одлика почетне наставе математике темељи се на чињеници да су проблемске ситуације врло често продукти неког „чистог математичког модела“ у том случају се поступак изградње модела састоји од конкретног решавања постављеног проблема.

Пошто је репрезентација или у ужем смислу модел, основа при разумевању и овладавању проблемском ситуацијом, а потом и одговоран чинилац за крањи исход, односно решење проблема, јасно је да између проблемске наставе и математичког моделовања постоји јака веза. Штавише способност математичког моделовања налази се у прикривеном облику у структури проблемске наставе, док с друге стране, спровођењем проблемске наставе може се утицати на ефикасан развој ове способности. Да је то заиста тако потврђује нам и Национални савет наставника математике (National Council of Teachers of Mathematics-NCTM, 2000) који математичко моделовање посматрају као процес који укључује пет врло важних међусобно повезаних корака: (1) идентификовати и поједноставити проблемску ситуацију у реалном свету; (2) изградити математички модел; (3) трансформисати и решити модел; (4) интерпретирати модел; (5) проверити и користити модел.

Новотна (Novotná, 1997) посматрајући математичко моделовање, истиче његову кључну улогу у процесу решавања проблема⁶, те у том смислу говори о његовој полифункционалној улози:

- поновно представљање које стимулише формирање релевантне менталне слике;
- манипулација, организација и модификација већ постојећих знања;
- тумачење које доприноси адекватном и лакшем разумевању суштине проблема;

⁶ „Ученици, који су у стању да исту проблемску ситуацију или математички концепт прикажу различитим представама, имаће један моћан флексибилан скуп алатки за решавање проблема“ (NCTM, 1989:146).

- реконструкција коришћеног језика у контексту представљања које је блиско ученицима и њиховим досадашњим искуствима.

Пресмиц (Presmeg, 1992) заступа став Новотне, те такође посебан акценат ставља на висок значај математичког моделовања које оно остварује у процесу решавања проблема. Наиме, његова визија је поткрепљена чињеницом да приликом решавања математичких проблема најважнији допринос том процесу пружају схеме или илустрације. Камински и сарадници (Kaminski et al., 2008) истичу да апстрактни модели односно репрезентације имају далеко већи значај у процесу решавања и разумевања математичких проблема у односу на оне конкретне. Адекватан избор репрезентације представља исправан пут који води до решења проблема, па је у том смислу и главна одлика увиђања односа и веза између математичких појмова.

Ако извршимо компаративну анализу између моделовања и традиционалног приступа у решавању проблема, извесне су бројне различитости које ћемо видети у наредној табели.

Табела 8. Компарација између традиционалног приступа и математичког моделовања, прилагођено према: Lesh & Doerr (2003) и Lesh & Zawojewski (2007)

Традиционални приступ решавању проблема	Математичко моделовање у решавању проблема
Процес закључивања врши се на основу датих података.	Процес закључивања врши се сагледавањем проблема са више аспеката.
Проблемска ситуација је вештачки осмишљена да одговара реалном контексту.	Проблеми су извор аутентичног контекста стварног живота.
Од ученика се очекује да користе познате математичке структуре у виду формула, стратегија и алгоритама.	Ученици стварају моделе који ће им помоћи да изграде неопходне стратегије.
Наглашен је индивидуални рад.	Наглашен је групни рад у коме доминирају развијање социјализације и размена математичких идеја.
Од ученика се очекује да разумеју математичке структуре и симболе.	Од ученика се очекује да проблеме из реалног света преводе у математички контекст.
Развијање јединственог приступа за решење проблема.	Комбиновање више различитих приступа и избор најрелевантнијег.
Добијање тачног одговора кроз један приступ.	Добијање тачног одговора посредством више приступа (модела).

Математичко моделовање је врло перспективан процес, те због свог великог доприноса који пружа настави математике може се посматрати кроз две категорије: (1) моделовање као наставно средство које служи подучавању математике; (2) моделовање као циљ подучавања математике (Blum & Niss, 1991; Gravemeijer, 2002; Julie & Mudaly, 2007; Galbraith, 2012).

Крајњи циљ прве категорије односи се на побољшавање и унапређивање компетенција ученика које су у вези са развојем способности математичког моделовања (Haines & Crouch, 2001, 2007; Izard et al., 2003) . Друга категорија сагласна је претпоставци да ученици могу смислено научити основне математичке концепте кроз процес математичког моделовања, које подразумева проверу стечених математичких знања у реалном свету (Lesh & Doerr, 2003).

Примарна улога математичког моделовања посматра се кроз два аспекта. Први, се односи на изузетну корист коју развој ове способности пружа приликом разумевања и решавања проблема из стварности, док се други аспект односи на доживљавање моделовања у виду стратегије која доприноси ефикасном учењу и поучавању (Kaiser-Messmer, 1991).

Према PISA 2006 истраживању да би се одређени модели представили адекватним математичким језиком, неопходно је увућање односа између метајезика и симболичког математичког језика. Дакле, „након успешног решавања проблема у оквиру математичке репрезентације, потребно је интерпретирати резултате потврђујући ваљаност резултата у реалном контексту“, развој способности математичког моделовања код ученика од великог је значаја и приликом интерпретирања добијених решења (Милинковић, 2014: 47). PISA 2009 истраживање поткрепљује чињеницу да су наши ученици знатно испод просека када је у питању вредновање математичке писмености. Међутим, с обзиром на PISA 2006 истраживање резултати су мало бољи, што је ипак показатељ неког минималног напретка. Функционалну неписменост кроз своје резултате показало је 40% ученика, што нам говори о томе да скоро трећина ученика из Србије није створила себи повољне услове за даље школовање и даљи напредак, као и то да своје знање нису у стању да примене у практичним активностима (Бауцал и Павловић-Бабић, 2010: 50).

Дости и Аштани (Doosti & Ashtiani, 2009) бавећи се математичким моделовањем указују на његове основне предности и недостатке у математичком образовању. Најпре ћемо представити предности које ова способност испољава:

- ученици су углавном заинтересовани за активности које су саставни део математичког моделовања;
- математичко моделовање припрема ученике за употребу математике у другим областима и подручјима;
- развој способности математичког моделовања ученику пружа могућност повезивања стечених знања са новим проблемима;
- развој ове способности могућ је на свим нивоима образовања;
- процес математичког моделовања је много флексибилнији у односу на традиционални приступ.

С друге стране важно је напоменути и одређене недостатке о којима говоре такође Дости и Аштани:

- понекад је врло тешко направити адекватан избор проблема, те, то је такорећи права „уметност“ за наставника;
- процес математичког моделовања захтева знатно више времена, а час је ограничен трајањем од 45 минута;
- ученици не воле да експериментишу са новим приступима у учењу, заправо ако проблем није примерен и правилно одабран врло често ће ученике ставити у демотивишуће стање.

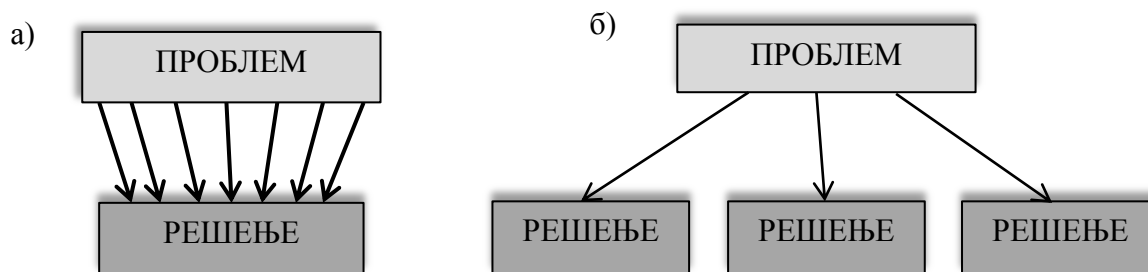
Узимајући у разматрање наведене предности и недостатке које математичко моделовање испољава, ми ћемо се углавном водити његовим позитивним ефектима које пружа настави математике, док ћемо негде у подсвести размишљати и о недостацима како бисмо обавезно водили рачуна о адекватној конституцији проблема.

2.3. Отворени проблеми као средство ефикасног развоја способности математичког моделовања

Кроз претходни текст говорили смо о важности и значају проблемске наставе, потом о њеним конститутивним елементима, који се крећу од проблемске ситуације до решавања проблема, где сме отприлике највише времена посветили крајњем циљу, тачније стратегијама које воде до решења и самом решавању постављеног проблема. Да би одређени проблем могао да буде подстрек развоју способности математичког моделовања, он најпре мора да поседује следеће карактеристике: отвореност, комплексност, блискост стварном свету, аутентичност, фокусираност на проблем и мора бити тако конципиран да се може решити уз примену математичког моделовања (Leuders & Maas, 2007).

Ми ћемо се у овом одељку базирати на проблеме отвореног типа, јер сматрамо да одигравају врло важну улогу при развоју способности математичког моделовања. Темеље методе отворених проблема проналазимо најпре на подручју Јапана, а потом и у многим другим земљама. Јапанско одређење отворених проблема у настави математике заснива се на процесу који је отворен, тачније мисли се на то да се могу користити различите стратегије како би се дошло до решења (циља). Такође, акценат се ставља и на крајњи производ који је такође отворен, што значи да постоји избор између неколико резултата (Марковић, 2011).

Ради бољег објашњења и залажења у срж проблема отвореног типа, изједначићемо термин проблем са термином задатак, тако да ћемо у појединим деловима текста говорити и о задацима отвореног типа. Посматрано са неког општег становишта проблем отвореног типа представља проблем који је отворен не само за једно, већ за више различитих решења (Nohda, према: Kwon, Park & Park, 2007).



Слика 6. Илустративне варијанте проблема отвореног типа

Бавећи се концептом отворених проблема Пехконен (Pehkonen, 1997) његову суштину истиче путем противуречности. Он најпре објашњава шта подразумевају проблеми затвореног типа који су супротни проблемима отвореног типа.

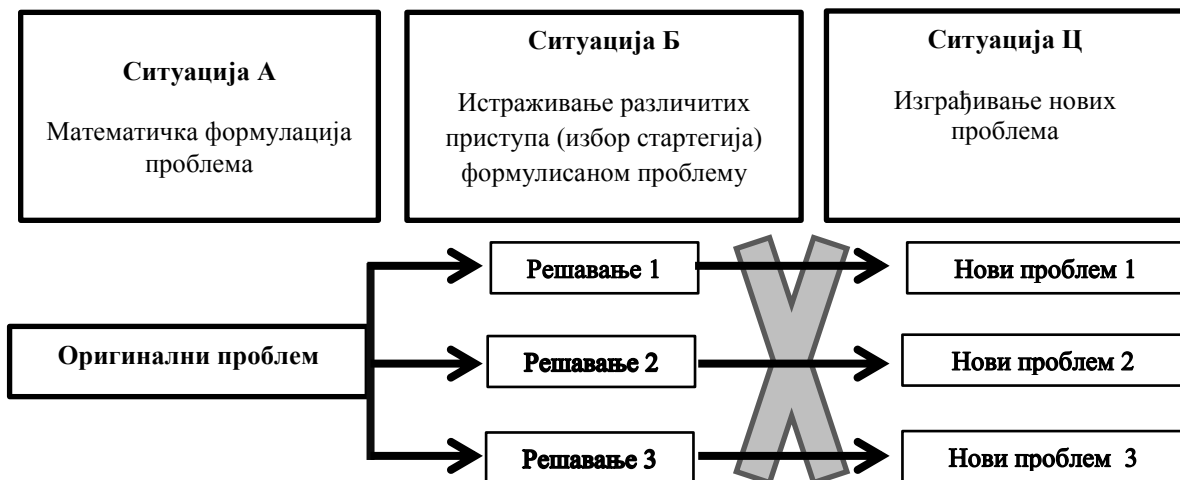
Према његовом мишљењу затворени проблеми садрже проблемску ситуацију и циљ који је „затворен“ односно унапред су објашњени. У супротном смислу, ако су почетна проблемска ситуација и њен циљ отворени (нису затворени) онда имамо отворен проблем.

Настава која подразумева коришћење и рад са задацима отвореног типа потребно је да испоштује и уважи три основна принципа (Nohda, 2000):

1. Принцип аутономности активности ученика. Овај принцип захтева од наставника да поштује залагање и труд ученика у наставном процесу, допуштајући му да самостално изнесе своје стратегије, које су пут до решења проблема. Није пожељно да наставник ученику намеће своје методе и поступке решавања и да захтева од њега да то усвоји.
2. Принцип еволуције и интегралне природе математичког знања. Ако математичко знање има више суштинске карактеристике, то значи да ће неко опште знање које проистиче из њега бити раскошније и садржајније.
3. Принцип избора тачних одговора ученика, од стране наставника. Свесни смо ситуација у којим нам ученици нуде различита решења и различите начине доласка до решења, у том смислу наставник мора прихватити све исправне идеје ученика и указати на њихову важност другим ученицима.

Нохда (Nohda, 2000) наводи три фазе према којима се врши организација наставе при коришћењу задатака отвореног типа:

1. формулисање проблема;
2. истраживање и избор адекватних стратегија које воде до решења;
3. изграђивање нових (напреднијих) проблема.



Слика 7. Концепт часа на коме се користе проблеми отвореног приступа (Nohda, 2000:42)

У оквиру ситуације А наставник ученицима представља оригинални проблем, који ученици треба да разумеју и да уз помоћ претходно стечених знања и искустава формирају математички проблем. Потом, у ситуацији Б ученици конструишу разноврсне стратегије које им могу помоћи приликом решавања проблема. Број стратегија није условљен, према слици су наведене три могућности, међутим може их бити и више. У овој ситуацији ученици би требало да се фокусирају на уочавање узрочно-последичних веза које владају између структуралних елемената сопствених идеја (стратегија). Најзад, ученик долази до ситуације Ц у којој на основу искустава из ситуације Б тежи формирању нових напреднијих проблема.

Односно, утврђује да ли своје алгоритме у решавању проблема може искористити у новим ситуацијама. Креирање нових проблема за ученика је врло мотивишуће и активизирајуће.

Марковић (2011) говори о пет тачака које су важне при имплементацији наставе уз помоћ задатака отвореног типа:

1. „увођење проблема;
2. разумевање проблема;
3. решавање проблема индивидуално или у групама са употребом свог језика и метода;
4. поређење и дискутовање решења, метода и формулисаних проблема;
5. сумирање и процена од стране наставника“ (стр. 18).

Посматрајући фазе о којима говоре Находа и Марковић, јасно се види да се у оквиру Находине три фазе, налази пет наведених фаза о којима говори Марковић. Разматрајући ове фазе можемо уочити да су оне својствене етапама према којима се спроводи проблемска настава с једне стране, односно суштински су везане за фазе које подразумева процес математичког моделовања, с друге стране. Ако извршимо компаративну анализу између фаза које наводи Марковић и Пољиних⁷ етапа при решавању проблема можемо истаћи њихово поклапање. Дакле, прву и другу фазу Марковића (увођење и разумевање проблема) Поља интегрише у једну под којом подразумева разумевање проблема, потом Марковић говори о решавању проблема индивидуално или у групама док Поља ту подразумева разрађивање и стварање плана за решавање проблема, претпоследња фаза код Марковића обухвата поређење и дискусију решења, док Поља говори о спровођењу плана који је осмишљен за решавање проблема. Најзад, последња фаза код оба наведена аутора резервисана је за проверавање решења и сумирање резултата. С обзиром на претходно речено можемо констатовати да постоји јака корелација између задатака отвореног типа, математичког моделовања и проблемске наставе.

Да бисмо успешно формулисали задатке отвореног типа који имају важну улогу у развоју способности математичког моделовања и отргли се из оквира проблема затвореног типа који су у домену традиционалног приступа, приказаћемо у наредној табели паралелну верзију оба типа проблема.

Табела 9. Проблеми „затвореног“ типа наспрам проблема „отвореног“ типа

ПРОБЛЕМИ ЗАТВОРЕНОГ ТИПА	ПРОБЛЕМИ ОТВОРЕНОГ ТИПА
Тепих правоугаоног облика има површину 36 cm^2 . Ако је ширина тепиха 9 cm , одреди његову дужину?	Тепих правоугаоног облика има површину 36 cm^2 . Које ширине и дужине може бити овај тепих?
Израчунај обим троугла чије су странице 2 cm , 3 cm и 4 cm .	Које дужине могу бити странице троугла, ако је његов обим 9 cm .
Нацртај правоугаоник чија је дужина 3 cm , а ширина 5 cm .	Нацртај правоугаоник површине 15 cm^2 .

⁷ Пољине етапе решавања проблема: (1) разумевање проблема; (2) разрађивање и стварање плана; (3) спровођење плана; (4) проверавање решења (Polya, 1975).

Решите неједначину: $3 \cdot x < 18$.	Приликом решавања неједначине $3 \cdot x < 18$, Марко је дошао до закључка да је њено једино решење $x = 6$. Да ли је Марков закључак исправан? Објасни.
Одреди количник и остатак при дељењу броја 21 са бројем 5.	Ако неки број поделимо са 5 добићемо остатак 1. Који број то може бити? Да ли постоји једно решење?

Креирање и коришћење проблема отвореног типа пружа велики допринос развоју стваралачког мишљења код ученика у почетној настави математике, што је уједно и један од циљева спровођења проблемске наставе и развоја способности математичког моделовања.

Савада кроз неколико тачака истиче важне одлике примене оваквих проблема: (1) остваривање вишег нивоа ангажмана и активности ученика у настави математике уз слободно исказивање својих идеја одговорних за конструkcију стратегија при решавању проблема; (2) ученици могу на више начина да искажу, а уједно и искористе своја математичка знања, умења и искуства; (3) сваки ученик може решавати постављени проблем на другачији начин, а притом добити тачан резултат; (4) отворени проблеми подстичу ученике на размишљање, расуђивање и закључивање; (5) могућност изналажења више решења датог проблема, делује мотивишуће на ученике и ствара осећај самоуверености (Sawada, према: Takahashi, 2000).

Марковић (2011) такође указује на основне одлике проблема отвореног типа у смислу могућности које пружају ученицима на часу математике:

- приступ новом проблему кроз разумевање и примену познатих идеја, стечених претходним искуствима;
- развијање нових знања, која подразумевају: формирање сопствених стратегија које воде до решења проблема, утврђивање њиховог смисла у својим резултатима и извршавање активности вредновања резултата;
- подстицај ученика на разговор у вези са стратегијама, алгоритмима и резултатима, уз њихово упоређивање, анализирање и прихватање.

Уопштени допринос почетној настави математике коју пружају проблеми отвореног типа огледа се и у томе да се ученици добро сналазе и успешно решавају ситуације у оквиру реалистичног контекста код којих су дате информације непотпуне, те у вези с тим ученици морају истраживати, претпостављати и погађати шта је то што недостаје (Chan, 2007). С обзиром на речено, ученици ће таквим приступом развијати и вежбати своје мисаоне вештине и способности које ће подстаћи креативан и стваралачки приступ решавању проблема.

2.4. Математичко-кибернетички модели у почетној настави математике

Свакодневни живот и ситуације у њему са којима се сусрећемо представљају извор разноврсних проблема које је потребно најпре сагледати, потом разумети и на крају осмислити пут и начин којим ћемо их решити. Пут до решења карактеристичан је по бројним баријерама на које ће ученици наићи и покушати да их савладају. Тајна превазилажења ових препрека лежи у максималној мисаоној ангажованости ученика коју прате различита поткрепљења и стимулације од стране наставника.

Како би ученик успешно претопио проблем из реалног света у математички проблем, неопходно је да овлада процесом моделовања или другачијим речима методом модела. „Метода модела је од изузетне важности за развијање одговарајућих интелектуалних способности ученика јер се остварује преко анализе и синтезе, апстракције и конкретизације, индукције и дедукције, упоређивања и аналогije“ (Пинтер и сар., 1996: 66).

Класификација модела с обзиром на гносеолошко подручје подразумева два базична типа: (а) материјалне моделе и (б) апстрактне моделе. За наш рад посебно је значајна врста апстрактних модела, који ће уз помоћ „математичких и логичких симбола и релација, представити стварност из датих аспеката и служе њеном схватању и даљем изучавању“, а реч је о математичко- кибернетичким моделима (Пинтер, 1995: 9).

Елементи, структуре и остале карактеристике моделовања (оригинала) морају бити својствени моделу, тачније, модел треба да преузме важна својства оригинала, а неважна да одбаци. Опредељење за одређени оригинал (одређивање оригинала), као и његова анализа почетни су кораци у математичко-кибернетичком моделовању. Као најважнију етапу у формирању модела наводимо избор, тачније дефинисање модела (појам, формула, релација) и сагледавање услова према којима тај модел важи. Математичко-кибернетички модели у функцији су средстава која служе индиректном изучавању објективне стварности. Опсег математичко-кибернетичких модела чине: појмови, операције, релације, једначине, неједначине, алгоритми и др. (Милинковић, 2003, 2013).

Дејић и Егерић (2007) говоре о директним и индиректним поступцима при решавању проблема. У фокусу директних метода не налази се модел којим се постављени проблем замењује, док је у домену индиректних метода модел врло актуелан и чини релевантну замену проблема. Говоривши о индиректним поступцима, наведени аутори посебан значај придају следећим методама: метода дужи, метода таблица, метода правоугаоника, метода Веновог дијаграма и метода фокусног дијаграма.

Карактеристикама и одликама почетне наставе математике према Милинковић (2013) одговарају следећи математички модели⁸:

- модели основних рачунских операција;
- логичко-комбинаторни модели;
- аритметичко-логички модели;
- геометријски модели решавања проблема;
- модели геометријских проблема;
- математичке игре.

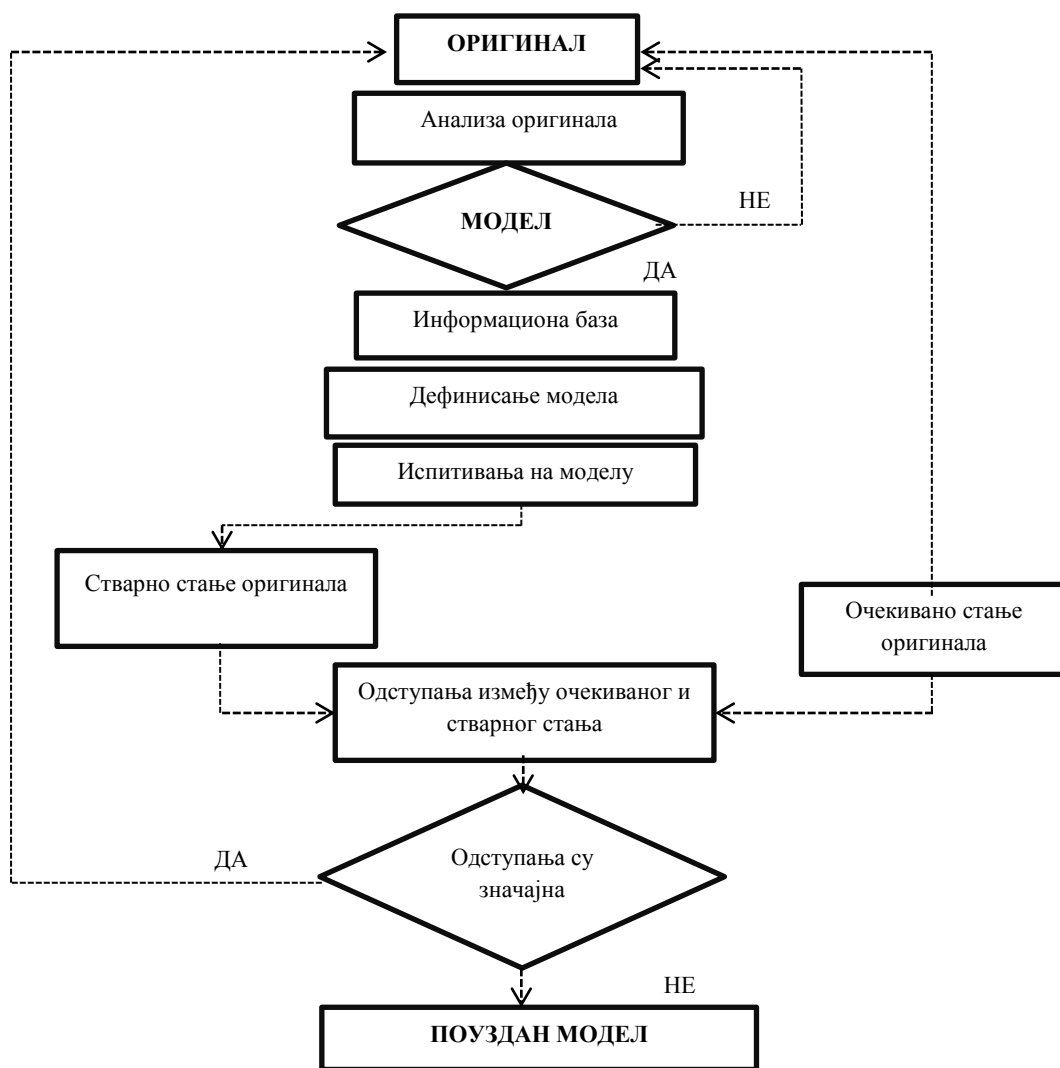
Пинтер (1995) истиче основне фазе математичко-кибернетичког моделовања које је потребно испоштовати приликом формирања модела:

1. „одређивање оригинала,
2. анализа оригинала,
3. одлука о увођењу модела,
4. изградња информационе базе за моделовање,

⁸ Поред наведених модела наша методика садржи и моделе који су склони даровитим ученицима у разредној настави: модели проблема мерење, вагања, преливања, пресипања, преношења и превозења; модели проблема на квадратној мрежи; модели стохастичких појава (Милинковић, 2013).

5. дефинисање модела,
6. испитивања на моделу,
7. пренос информација са модела на оригинал,
8. верификација добијених информација на оригиналу,
9. модификација модела“ (стр. 9-10).

Следећа слика даје јасну представу која је оличење поступка формирања и настанка поузданог модела .



Слика 8. Шематски приказ стварања модела (Пинтер, 1995:10)

Један од кључних проблема који одсликава наставу математике темељи се на поступку и начину формирања адекватних математичких модела, јер модел представља оригинал само са неког одређеног становишта. Како би се модел схватио на што адекватнији начин, не може настати на основу појединих дефиниција или насумично одабраних примера, већ на основу разноврсних оригинала које одликују неке заједничке карактеристике.

С тим у вези Беркли констатује да „једна идеја посматрана за себе јесте посебна, постаје општа тиме што јој се омогућује да представља или заступа све друге посебне идеје исте врсте“ (Berkeley, према: Arnhaјm, 1985: 131).

Квалитет формирања математичких модела најбоље се уочава у етапи њихове примене. Уколико је неки математичко-кибернетички модел ученицима дат у готовом облику или је потекао на основу одређене дефиниције, такав модел не може бити добро схваћен, а ни примена истог неће бити адекватна. Важно место при стварању модела припада развоју мисаоних операција, али и графичким активностима које су одраз „конкретних“ апстракција које граде везе између конкретнoг и апстрактног. Апстраховања⁹ се врше поступком „математизације“, другим речима „кибернетизацијом“ модела (Пинтер, 1995).

Сходно потребама нашег рада посебну пажњу посветићемо аритметичко-логичким и геометријским моделима решавања проблема. Те ћемо у даљем тексту говорити о наведеним математичко-кибернетичким моделима.

2.5.1. Аритметичко-логички модели

Почетна настава математике преплављена је проблемима чијим се решавањем „доказује постојање објекта (елемента) са одређеним својством“. Да бисмо, рецимо, доказали да елементи неког скупа A имају својство K , важно је доказати да сваки елемент скупа A поседује својство K . У супротном смислу могуће је пронаћи „контрапример“ тачније бар један елемент који нема дато својство да би се тврђење оповргнуло (Милинковић, 2013: 45). Међутим, постоје и они случајеви где је врло тешко пронаћи неки супротан пример, па је тада довољно само показати егзистенцију противпримера (Пинтер, 1995).

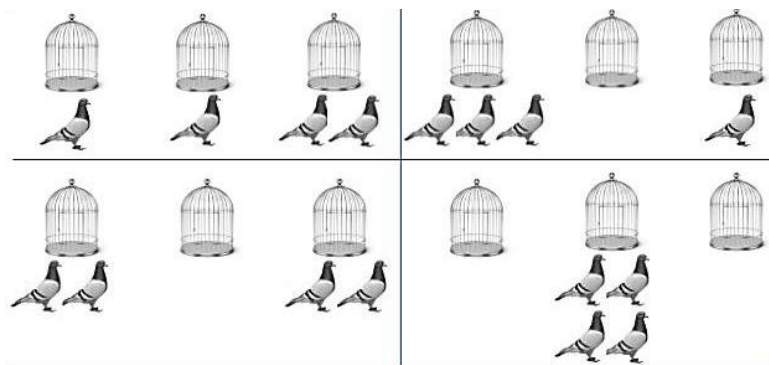
Дирихлеов принцип

Овај принцип у некој општој форми гласи: ако у M кавеза има N зечева, при чему је $N > M$ (број зечева је већи од броја кавеза), онда су бар у једном кавезу два зеца. Овај принцип име је добио по свом творцу, немачком математичару Дирихлеу (G. L. Dirichlet, 1805 – 1859) који је га је користио при решавању проблема у подручју теорије бројева.

Пример 1. Милош има 3 кавеза и 4 голуба. Докажи да у једном кавезу мора бити бар два голуба.

Решење. Следећа слика показује распоред голубова по кавезима, на основу које видимо да ће у сваком случају у једном кавезу бити бар два голуба.

⁹ Фроједентал (Freudenthal, 1973) говори о два основна облика апстраховања: (а) компрехензија- из неколико примера који садрже шум (небитна својства) издвајамо битна својства; (б) апрехензија- „узимамо“ својство из примера које најнепосредније показује битна својства.



Слика 9. Кавези и голубови

Пример 2. Ако је у једној фирми 38 радника, да ли постоје бар два радника чије име почиње истим словом?

Решење. С обзиром да азбука, али и абецеда имају мање од 38 слова, имена бар два радника морају почети са истим словом.

Пример 3. У петом разреду је 13 ученика. Докажи да бар 2 ученика мора славити рођендан у истом месецу.

Решење. Пошто у разреду има 13 ученика, а у години 12 месеци, значи да према идеалној распоређености у сваком месецу биће по један рођендан, док ће 1 ученик остати нераспоређен. Дакле, 2 ученика ће сигурно славити рођендан у истом месецу.

Модели једначина

Применом математичког моделовања одређене непознате величине врло често се обележавају малим латиничним словима (x , y , z , a , b и др.) којима се представљају односи и везе у оригиналу који се моделује. Тим путем долази се до различитих облика једначина (линеарних, квадратних, експоненцијалних, логаритамских и др.).

Метода једначина је једна од најзначајнијих када је у питању почетна настава математике и решавање проблема. Приликом коришћења споменутог модела ученици наилазе на бројне проблеме од којих су најзначајнији: формирање адекватних једначина и њихово решавање (Пинтер, 1995).

Релације које су својствене моделовању једначина су:

- a је за c веће од b , односно, $a = b + c$;
- a је за c мање од b , односно, $a = b - c$;
- a је c пута веће од b , односно, $a = b \cdot c$;
- a је c пута мање од b , односно, $a = b : c$;
- узастопни природни бројеви (n , $n+1$, $n \in \mathbb{N}$);
- двоцифрени број, према симболичком запису: $10 \cdot n + m$;
- збир бројева a и b , према симболичком запису: $(a + b)$;
- производ бројева a и b , према симболичком запису: $(a \cdot b)$;

- количник бројева a и b , где је a дељеник, а b делилац, према симболичком запису: ($a : b$).

Поред наведених релација при моделовању једначина врло је важно владати знањем које је у вези са дељивошћу бројева:

- да би број био дељив са 2, мора бити паран број;
- да би број био дељив са 3, збир његових цифара мора бити дељив са 3;
- број је дељив са 6, ако је истовремено дељив са 2 и са 3;
- број је дељив са 9, ако му је збир цифара дељив са 9;
- број је дељив са 10, ако му је последња цифра 0;
- број је дељив са 5, ако су му последње цифре 0 или 5;
- број је дељив са 4, ако му је двоцифрени завршетак дељив са 4.

Пример 4. Збир два броја је 88. Који су то бројеви, ако се зна да је један сабирак 10 пута већи од другог ?

Решење: I сабирак : x

II сабирак: $10 \cdot x$

I сабирак + II сабирак = 88

$x + 10 \cdot x = 88$

$11 \cdot x = 88$

$x = 88 : 11$

$x = 8$

Провера: $8 + 10 \cdot 8 = 8 + 80 = 88$

Одговор: I сабирак је број 8, а II сабирак је број 80.

Пример 5. Мајка је 6 пута старија од кћерке, а син је 22 године млађи од мајке. Које је дете старије и за колико ако сви заједно имају 56 година?

Решење: Кћерка: x

Мајка: $6 \cdot x$

Син: $6 \cdot x - 22$

Заједно: 56 година;

$x + 6 \cdot x + 6 \cdot x - 22 = 56$

$13 \cdot x - 22 = 56$

$13 \cdot x = 56 + 22$

$13 \cdot x = 78$

$x = 78 : 13$

$x = 6$

Провера: $6 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot 6 - 22 = 6 + 36 + 36 - 22 = 42 + 36 - 22 = 78 - 22 = 56$.

Одговор: Кћерка има 6 година, мајка има $6 \cdot 6 = 36$ година, а син има $6 \cdot 6 - 22 = 36 - 22 = 14$ година. Дакле син је старији од кћерке за: $14 - 6 = 8$ година.

Пример 6. Саша скупља сличице фудбалера. Када би сакупио још три пута толико сличица колико их сада има, недостајало би му 12 сличица да би имао 100. Колико сличица има Саша?¹⁰

¹⁰ Овај задатак је 7. по реду на *Завршном тесту 1* у истраживању које је спроведено за потребе овог рада.

Решење: Саша тренутно има: x сличица

$$x + 3 \cdot x + 12 = 100$$

$$4 \cdot x + 12 = 100$$

$$4 \cdot x = 100 - 12$$

$$4 \cdot x = 88$$

$$x = 88 : 4$$

$$x = 22$$

Провера: $22 + 3 \cdot 22 + 12 = 22 + 66 + 12 = 88 + 12 = 100$.

Одговор: Саша има 22 сличице.

Пример 7. Летело је јато гусака, а у сусрет долази им гусан и виче: „Здраво сто гусака!“. А гуска предводник му одговара: „Нема нас сто. Да нас је оволико колико нас је и још два пута толико, и уз то да си и ти гусане са нама, онда би било тачно сто на броју. А сада колико нас је израчунај сам! “. Колико је било гусака у јату? (Пинтер, 1995:29).

Решење: Пошто се не зна број гусака у јату, тај број обележиће се са x .

$$x + 2 \cdot x + 1 = 100$$

$$3 \cdot x + 1 = 100$$

$$3 \cdot x = 100 - 1$$

$$3 \cdot x = 99$$

$$x = 99 : 3$$

$$x = 33$$

Провера: $33 + 2 \cdot 33 + 1 = 33 + 66 + 1 = 99 + 1 = 100$.

Одговор: У јату су биле 33 гуске.

Пример 8. На три полице налази се по једнак број књига, а на столу је 110 књига. Колико је књига на једној полици, ако је укупан број књига на полицама и столу 560?

Решење: Пошто се не зна колико се на свакој полици налази књига тај број обележиће се са x . Пошто је реч о три полице, дакле на те три полице биће $3 \cdot x$ књига.

$$3 \cdot x + 110 = 560$$

$$3 \cdot x = 560 - 110$$

$$3 \cdot x = 450$$

$$x = 450 : 3$$

$$x = 150$$

Провера: $3 \cdot 150 + 110 = 450 + 110 = 560$.

Одговор: На једној полици је 150 књига.

Модел неједначина

За решавање одређених математичких проблема нису довољни само модели једначина, већ и модели неједначина. За разлику од једначина, неједначине садрже више од једног решења, те у том контексту говоримо о скупу решења.

Тај скуп понекад може бити празан, док с друге стране у неким ситуацијама може бити и бесконачан.

Релације којима ученици морају овладати у почетној настави математике, да би могли моделовати са неједначинама су следеће:

- a је веће од b , односно, $a > b$;
- a је веће или једнако b , односно, $a \geq b$;
- a је мање од b , односно, $a < b$;
- a је мање или једнако b , односно, $a \leq b$.

Да бисмо се боље упознали са применом модела неједначина кроз наредне примере илустроваћемо овај модел.

Пример 9. Милош је замислио неки природан број. Тај број је помножио са 60 и добио производ који је мањи од 420. Који број је Милош могао замислити?

Решење: $x \cdot 60 < 420$
 $x < 420 : 60$
 $x < 7$
 $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Одговор: Милош је могао замислити број који је мањи од 7, тј. могао је замислити број 1 или 2 или 3 или 4 или 5 или 6.

Пример 10. У корпи се налази 15 јабука. Колико се јабука може узети да би у корпи остало више од 10 јабука?

Решење: Пошто се не зна колико се јабука може узети из корпе, тај број се обележава са x . Према услову задатка број јабука у корпи, $15 - x$, треба да буде већи од 10. То се симболички записује на следећи начин: $15 - x > 10$. Потом се приступа решавању постављене неједначине.

$$\begin{aligned} 15 - x &> 10 \\ x &< 15 - 10 \\ x &< 5 \\ x &\in \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

Одговор: Из корпе се могу узети 1, 2, 3 или 4 јабуке.

Пример 11. Марко је замислио неки број из скупа N , када га је поделио са 6 добио је број који није већи од броја 7. Истражи које је бројеве Марко могао да замисли?

Решење:

$$\begin{aligned} x : 6 &\leq 7 \\ x &\leq 7 \cdot 6 \\ x &\leq 42 \\ x &\in \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42\} \end{aligned}$$

Одговор: Марко је могао да замисли бројеве који су мањи или једнаки броју 60. А реч је о: 6, 12, 18, 24, 30, 36 или број 42.

Код неједначина врло је важно напоменути да су ученици ограничени на скуп природних бројева, тј. на скуп N . Такође приликом представљања решења важно је поседовати знање у вези са дељивости бројева, као што је у овом случају потребно навести све природне бројеве који су мањи или једнаки 42, а дељиви бројем 6.

Пример 12. Сара је од свог џепарца сакупила 1500 динара. Када је добила новац од баке, још увек није могла да купи књигу која кошта 2340 динара. Колико је новца Сара могла да добије од баке?¹¹

Решење: С обзиром да је непознато колико је Сара новца могла добити од баке, тај новац се може означити као x .

$$1500 + x < 2340$$

$$x < 2340 - 1500$$

$$x < 840$$

$$x \in \{839, 838, 837, \dots, 1\}$$

Одговор: Сара је могла добити од баке мање од 840 динара.

Пример 13. Када неки број увећаш 6 пута, а затим увећаш за 120, добићеш број већи од 720. Истражи који то бројеви могу бити?

Решење: $6 \cdot x + 120 > 720$

$$6 \cdot x > 720 - 120$$

$$6 \cdot x > 600$$

$$x > 600 : 6$$

$$x > 100$$

$$x \in \{101, 102, 103, \dots\}$$

Одговор: То могу бити сви бројеви који су већи од 100. А таквих бројева има бесконачно.

Пример 14. Никола и Стефан баве се поправком аутомобила. У једној гаражи налази се неколико аутомобила, у другој је 2 пута више аутомобила него у првој, док је у трећој гаражи 36 аутомобила. Стефан је питао Николу: „Колико аутомобила се налази у првој гаражи ? “, Никола одговара: „Мислим да је укупан број аутомобила у све три гараже мањи од 48, па ти израчунај колико може бити у првој“. Хајде, да помогнемо Стефану и одредимо колико аутомобила може бити у првој гаражи?

Решење: I гаража: x аутомобила

II гаража: $2 \cdot x$ аутомобила

III гаража: 36 аутомобила

Укупан број аутомобила у све три гараже мањи је од 48. То се симболички може записати: $x + 2 \cdot x + 36 < 48$. Потом се приступа решавању постављене неједначине:

$$x + 2 \cdot x + 36 < 48$$

$$3 \cdot x + 36 < 48$$

$$3 \cdot x < 48 - 36$$

$$3 \cdot x < 12$$

$$x < 12 : 3$$

$$x < 4$$

$$x \in \{3, 2, 1\}$$

Одговор: У првој гаражи могу да се налазе 3, 2 или 1 аутомобил.

¹¹ Овај задатак је 5. по реду на *Завршном тесту 1* у истраживању које је спроведено за потребе овог рада.

Метод инверзије

Врло често приликом решавања проблема у почетној настави математике познат је крајњи резултат као и услови који нас до тог резултата доводе, а непозната је полазна величина. Код оваквих задатака могуће је користи моделовање једначинама, међутим много лакши пут који се може применити јесте метод инверзије, који од ученика захтева добро овладавање основним рачунским операцијама (сабирање, одузимање, множење и дељење). У оквиру методе инверзије полазна тачка налази се у крајњем резултату, те се посредством инверзних операција од оних које воде од правог почетка до краја, долази до решења постављеног проблема (Милинковић, 2013).

Пример 15. Када би Ана била 6 пута старија, тада би заједно са својим братом имала 72 године. Колико година има Ана, ако њен брат има 12 година?

Решење: Полази се од последњег податка, тачније од збира Ааниних и братових година (72). Уместо додавања, од тог броја одузимају се братове године (12), односно, $72 - 12 = 60$. Добијена разлика се дели (уместо да се помножи) са 6, тј. $60 : 6 = 10$. На овај начин се добија број Ааниних година (10).

Одговор: Ана има 10 година.

Пример 16. Јелена је сакупљала новац у своју касицу како би купила мајицу, хаљину и сукњу. За мајицу је дала 500 динара, за хаљину половину остатка, а за ципеле 1200 динара. Када је суми новца која јој је остала додала 600 динара које је добила од баке, имала је укупно 1700 динара. Колико је Јелена имала новца у својој касици?

Решење: Кренуће се од последњег податка, односно од суме новца коју је Јелена имала на крају (1700), користећи инверзне операције.

1. корак : $1700 - 600 = 1100$,
2. корак: $1100 + 1200 = 2300$,
3. корак: $2300 \cdot 2 = 4600$,
4. корак: $4600 + 500 = 5100$.

Одговор: Јелена је у својој касици имала 5100 динара.

Пример 17. Саша је први дан прочитао половину лектире, други дан половину непрожитаног дела лектире, трећи дан половину преосталог дела лектире, и за четврти дан остало му је 20 непрожитаних страна. Колико лектира има страна?

Решење: Кренуће се од последњег податка, тј. од броја страна књиге које је Саша прочитао четвртог дана (20).

1. корак: $20 \cdot 2 = 40$,
2. корак: $40 \cdot 2 = 80$,
3. корак: $80 \cdot 2 = 160$.

Одговор: Лектира има 160 страна.

2.5.2. Геометријски модели решавања проблема

Поред аритметичко-логичких модела који имају широку примену у решавању проблема у почетној настави математике, постоје и проблеми који се немогу решити уз помоћ њих већ су им релевантни геометријски модели решавања проблема. Врло често као олакшавајућа околност може нам послужити превођење одређеног текстуалног проблема у иконичку форму, тј. у форму скице, цртежа, табеле, слике или било којег графичког приказа.

Милинковић (2013:56) представља најзначајније геометријске моделе који испољавају велику ефикасност у смислу решавања проблема:

- „метода дужи;
- метода таблица;
- метода графова;
- метода фокусног дијаграма;
- метода блокдијаграма“.

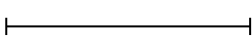
Користећи ове моделе најпре добијамо графички приказ односа међу величинама, док с друге стране апстрактни свет математике прелази у подручје графичких приказа које је много ближе, једноставније и занимљивије ученицима.

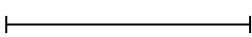
Метод дужи

Дуж најпре посматрамо као геометријску фигуру која има своју вишеструку примену у почетној настави математике, док се једна огледа у конструкцији математичких модела приликом решавања проблема.

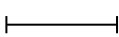
Релације (односи) између величина могу се представити на следећи начин уз помоћ дужи:

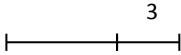
I Величине m и n су једнаке.

Величина m : 

Величина n : 

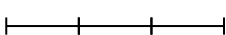
II Величина m је за 3 мања од величине n .

Величина m : 

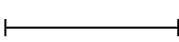
Величина n :  3

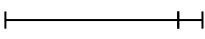
III Величина m је 3 пута мања од величине n .

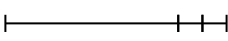
Величина m : 

Величина n : 

IV Узастопни природни бројеви.

Први број (n): 

Други број ($n+1$): 

Трећи број ($n+2$): 

Како бисмо успешно икористили методу дужи и уз помоћ ње решавали проблеме који се нађу пред нама, неопходно је да се упознамо са репрезентативним примерима који је одсликавају.

Пример 18. Збир четири узастопна природна броја је 420. Други број је 2 пута већи од првог, трећи број је 3 пута већи од првог, а четврти број је 4 пута већи од првог броја. О којим бројевима је реч?

Решење:

I број:	$\overline{\quad\quad\quad}^x$	x
II број:	$\overline{\quad\quad\quad}^{2x}$	$2 \cdot x$
III број:	$\overline{\quad\quad\quad}^{3x}$	$3 \cdot x$
IV број:	$\overline{\quad\quad\quad}^{4x}$	$4 \cdot x$
Збир :	$\overline{\quad\quad\quad}^{10x}$	$10 \cdot x$

$$10 \cdot x = 420$$

$$x = 420 : 10$$

$$x = 42$$

I број:	42
II број:	$2 \cdot 42 = 84$
III број:	$3 \cdot 42 = 126$
IV број:	$4 \cdot 42 = 168$

Одговор: Први број је 42, други број је 84, трећи 126 и четврти 168.

Пример 19. Милан има три бурета у којима се налази укупно 490 литара вина. У првом бурету било је за 185 литара вина више него у другом бурету, а у трећем бурету било је 3 пута више литара вина него у другом бурету. Колико је литара вина било у сваком бурету ?

Решење:

I буре:	$\overline{\quad\quad\quad}^{185l}$	$x + 185l$
II буре:	$\overline{\quad\quad\quad}$	x
III буре:	$\overline{\quad\quad\quad}$	$3 \cdot x$

$$x + 185l + x + 3 \cdot x = 490l$$

$$5 \cdot x + 185l = 490l$$

$$5 \cdot x = 490l - 185l$$

$$5 \cdot x = 305l$$

$$x = 305l : 5$$

$$x = 61l$$

III type: $3 \cdot 61l = 183l$

Пример 21. Попуни следећу табелу, према подацима који су дати¹².

Умањеник	5	10	9
Умањилац	3	4	8
Разлика	2	6	1

У другом разреду основне школе таблица може одиграти важну улогу приликом овладавања односима „за толико мањи (већи)“ или „толико пута мањи (већи)“. Међутим, то није једини случај, поготово што је на том узрасту карактеристично савладавање таблице множења и дељења.

Пример 22. Попуни следећу табелу према датим подацима.

Број	12	20	25	34
Увећај за 2	14	22	27	36
Увећај 2 пута	24	40	50	68

Трећем и четвртном разреду у почетној настави математике таблице су својствене с више аспеката, тако да коришћење истих има широк опсег.

Пример 23. Уз помоћ следеће табеле реши постављену неједначину у скупу $\mathbb{N}$.

$$x \cdot 2 < 12$$

x	1	2	3	4	5
$x \cdot 2$	2	4	6	8	10

Дакле, решења неједначине су сви бројеви мањи од 6, тј. $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Пример 24. Следећу табелу попуни, а потом закључи како се мења збир у зависности од промене сабирка.

a	b	a+b
240	25	265
240	25+20	285
240	25+100	365

Закључак: Ако сабирак повећамо за неки број, збир ће се такође повећати за тај исти број.

¹² Поља која су у табелама осенчена представљају дате (познате) елементе.

Андрић и сар. (2016) истичу да „приказивањем података у форми таблице добија се визуелни преглед у коме се јасније уочавају битне релације између објеката, а смим тим се лакше долази до исправних закључака. Најчешће се примењују у задацима ‘са пресицањем’, који се обрађују у додатној настави нижих разреда основне школе, у задацима са одређивањем поретка, могу се примењивати приликом решавања једноставнијих проблема из теорије бројева, али и приликом решавања сложенијих логичко-комбинаторних проблема“ (стр.16). Поступак примене методе таблица огледа се и у томе да елементе једног објекта уписујемо у колоне, а елементе другог објекта у редове. Уколико постоји релација и повезаност између два објекта обично се ставља ознака „+“ , док у супротном уписује се ознака „—“. Ради ефикаснијег овладавања методом таблица приликом одабира ове методе углавном се приступа формирању полазних, а затим и коначних таблица. Целокупан алгоритам овог процеса биће нам много јаснији кроз примере који следе.

Пример 25. На игралишту су Ана, Сања, Тања, Милош, Марко, Саша и Јован. Сви дечаци су трчали по један круг са сваком девојчицом. Израчунај укупан број претрчаних кругова.

Решење: Све могуће комбинације девојчица (елементи првог скупа) и дечака (елементи другог скупа) представимо у следећој табели:

	Ана	Сања	Тања
Милош	+	+	+
Марко	+	+	+
Саша	+	+	+
Јован	+	+	+

Дакле, потребно је сваку девојчицу придружити сваком дечаку и обрнуто. На тај начин ћемо формирати парове који ће трчати кругове.

Одговор: Укупно је претрчано 12 кругова (пребројали смо укупан број „+“).

Пример 26. Милош, Игор и Стефан иду у исти разред и баве се различитим спортовима (фудбал, кошарка и рукомет). Којим спортом се бави сваки од дечака ако се зна да Милош не игра фудбал, Стефан не воли кошарку, а Игор не игра ни фудбал ни рукомет.

Решење: Креће се од полазне таблице у коју се уписују познате информације. Будући да су познати елементи дати у смислу „не воли“ или „не игра“ у одговарајућа поља уписује се знак „—“. На основу наведене таблице и уз помоћ логичког расуђивања формира се коначна таблица која приказати решење постављеног проблема.

Полазна таблица

	Милош	Игор	Стефан
фудбал	-	-	
кошарка			-
рукомет		-	

Прво што се може закључити јесте да се Игор сигурно бави кошарком, јер не игра ни фудбал ни рукомет (у пресечно поље уписати ознаку „+“). Потом, пошто се Игор бави кошарком, то значи да се Милош не може бавити тим спортом, а пошто Милош не игра фудбал, једино преостаје да се бави рукометом. Те је на крају лако закључити да Стефан игра фудбал.

Коначна таблица

	Милош	Игор	Стефан
фудбал	-	-	+
кошарка	-	+	-
рукомет	+	-	-

Одговор: Милош игра рукомет, Игор кошарку, а Стефан фудбал.

Пример 27¹³. На шаховском турниру ученици Милан, Стефан и Јован, представљали су своја одељења. Један од њих је био IV_1 , други IV_2 , а трећи IV_3 одељење. Прву партију играли су Милан и ученик из IV_1 ; другу партију играо је Стефан са учеником из IV_3 , а Милан се одмарао. У ком одељењу је сваки од њих?

Решење: Користиће се метод таблица.

	IV_1	IV_2	IV_3
Милан	-	+	-
Јован	-	-	+
Стефан	+	-	-

Пошто је прву партију играо Милан са учеником из IV_1 то значи да Милан сигурно није из тог одељења. Другу партију играо је Стефан са учеником из IV_3 , а Милан се одмарао, одакле закључујемо да Стефан није из IV_3 а ни Милан. Дакле из IV_3 мора бити Јован. Пошто Милан није из IV_1 , јасно је да из тог одељења мора бити Стефан. Те се закључује да је Милан ученик из одељења IV_2 .

Одговор: Милан је из одељења IV_2 , Јован из IV_3 и Стефан из IV_1 .

Пример 28. Сара, Ана и Сања живе у три различита града и имају различита занимања. Сара живи у Београду и није стоматолог. Сања није учитељица и није куварица, а она која је учитељица, није из Ниша него из Краљева. Из ког града је свака од њих и шта је по занимању?

¹³ Овај задатак је 2. по реду на *Завршном тесту 2* у истраживању које је спроведено за потребе овог рада.

Решење: Проблем који је постављен садржи три скупа објеката: скуп девојака, скуп градова и скуп занимања. Применом методе таблица може се овај проблем решити на два начина:

- а) формирањем две таблице (прва- комбинација девојака и градова; друга- комбинација девојака и занимања);
- б) формирањем једне, продужене таблице са заједничким врстама јер је скуп девојака заједнички.

а) Формирање две таблице:

	Београд	Ниш	Краљево
Сара	+	-	-
Ана	-	-	+
Сања	-	+	-

	куварица	стоматолог	учитељица
Сара	+	-	-
Ана	-	-	+
Сања	-	+	-

б) Формирање једне продужене таблице:

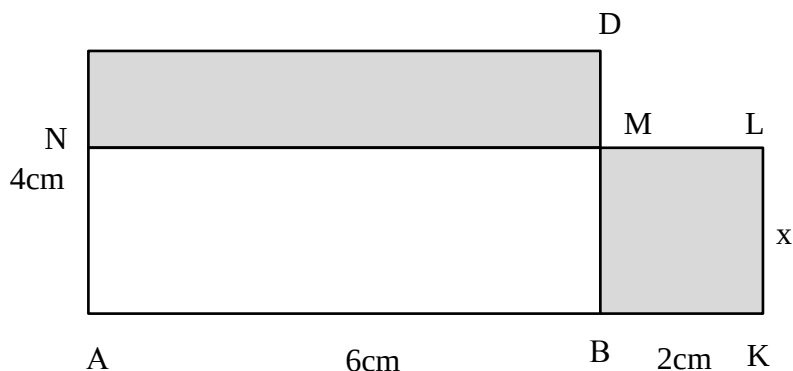
	Београд	Ниш	Краљево	куварица	стоматолог	учитељица
Сара	+	-	-	+	-	-
Ана	-	-	+	-	-	+
Сања	-	+	-	-	+	-

Одговор: Сара живи у Београду и по занимању је куварица, Ана је из Краљева, а по занимању је учитељица, док је Сања из Ниша и по занимању стоматолог.

Метод правоугаоника

Проблеми у почетној настави математике у којима се одређена величина може представити као производ друге две величине подразумева моделовање у смислу коришћења методе правоугаоника. С обзиром на различите типове проблема са којим се можемо сустрести понекад је неопходно један правоугаоник трансформисати у други, тако да им површине буду једнаке (Милинковић, 2013). Претварање једног правоугаоника у други може се илустровати кроз наредне примере.

Пример 29. Правоугаоник дужине 6cm и ширине 4cm претвори у други правоугаоник једнаке површине чија је дужина 8cm.



Како су површине правоугаоника ABCD и AKLN једнаке ($P_{ABCD} = P_{AKLN}$) то је:

$$\begin{aligned} 6\text{cm} \cdot 4\text{cm} &= 8\text{cm} \cdot x \\ 24\text{cm}^2 &= 8\text{cm} \cdot x \\ x &= 24\text{cm}^2 : 8\text{cm} \\ x &= 3\text{cm} \end{aligned}$$

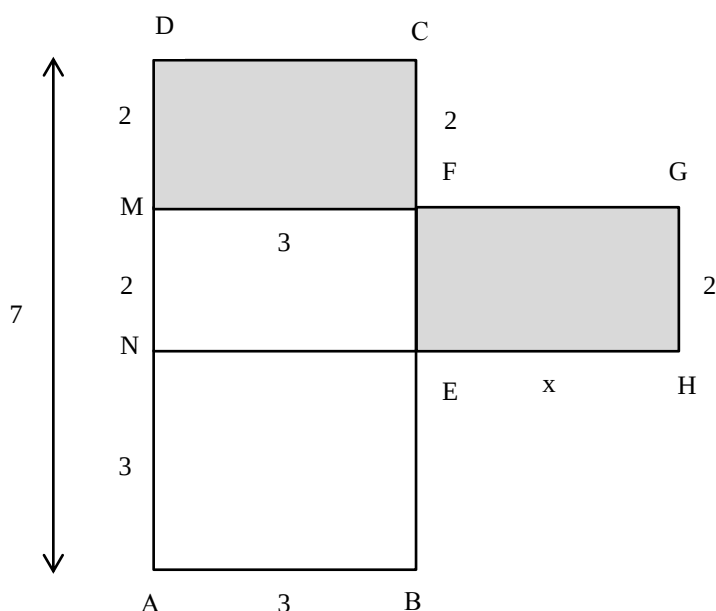
С обзиром на добијено површине правоугаоника NMCD и BKLM су једнаке ($P_{ABCD} = P_{AKLN}$), што се јасно може закључити и на основу података:

$$\begin{aligned} 6\text{cm} \cdot 1\text{cm} &= 2\text{cm} \cdot 3\text{cm} \\ 6\text{cm}^2 &= 6\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Претварањем једног правоугаоника у други врло је корисно при транспоновању проблема из реалног живота у математички проблем, рецимо, израчунавање пређеног пута одређеном брзином или израчунавање вредности неке робе и сл.

Пример 30. Три радника крече зграду и за тај посао потребно им је 7 сати. Након 3 сата у помоћ им је пристигло неколико радника па су зграду окречили 2 сата раније. Колико радника им је пристигло у помоћ?

Решење: Користиће се метод правоугаоника.



AB - број радника који раде (3);

AD - број потребних сати како би се завршио дати посао (7);

EH - број радника који су пристигли у помоћ (x);

HG (NM) - број сати које су радили сви радници заједно (2);

MD – број сати за које је посао раније завршен (2).

$$P_{NECD} = P_{NHGM}$$

$$P_{EHGF} = P_{MFCD}$$

$$2 \cdot x = 2 \cdot 3$$

$$2 \cdot x = 6$$

$$x = 6 : 2$$

$$x = 3$$

Одговор: У помоћ су им пристигла 3 радника.

Метод графа

Процес моделовања у решавању проблема и превођењу тих проблема из реалног у математички контекст врло често захтева примену методе графова, чије је оличење очигледност, те у вези са тим ова метода врло често има предност у односу на друге методе. Граф представља „шему коју чине тачке (темена или чворови графа) и линије које их повезују (ивице или луци графа), а које могу бити праве или криве. Граф може бити оријентисан (граф са стрелицама) или неоријентисан“ (Милинковић, 2013: 82).

Када је реч о оријентисаном графу елементи који су дати у задатаку приказују се тачкама, а односи између њих стрелицама. Рецимо, ако је елемент М у релацији „је испред“ са елементом Р, то илуструјемо на следећи начин:

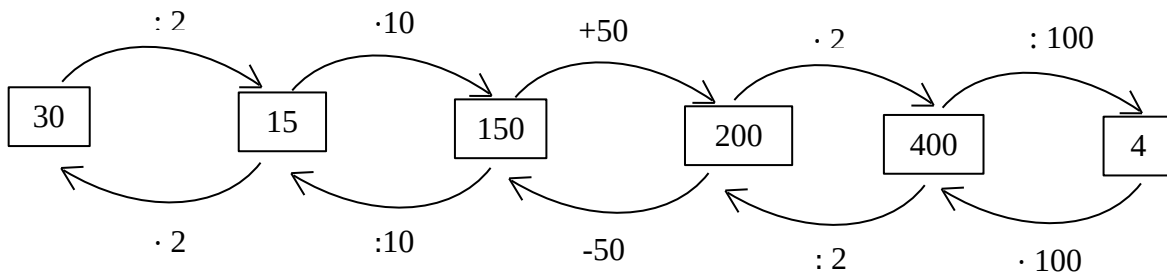


Код неоријентисаног графа елементе такође приказујемо тачкама, а односе (релације) између њих представљамо линијама. Уколико су елементи у одређеној релацији повезујемо их пуном линијом, односно, ако нису у релацији повезаћемо их испрекиданом линијом.



Пример 31. Ана и Сања су се играле погађања замишљеног броја. Ана каже: „Мој замишљени број је најпре умањен 2 пута, потом је добијеном количнику дописана једна 0 и све то повећано за 5 десетица, а потом удвостручено. На крају, када су одбачене последње две цифре које су биле нуле, остао је број 4“. Који број је замислила Ана?

Решење: Користиће се метод графа.



Први корак који ће се реализовати коришћењем методе графа јесте приказивање датих података стрелицама (односно рачунских операција које је потребно извршити на замишљеном броју). Прво се замишљени број умањује 2 пута, потом увећава 10 пута, затим увећава за 50, па увећава 2 пута и на крају умањује 100 пута. Пошто је крајњи број који се добија након свих извршених рачунских операција 4, тај број се уписује у последњи квадрат. Како би се дошло до решења постављеног проблема, даљи поступак кретаће се од броја 4 уназад, који сада представља полазну основу.

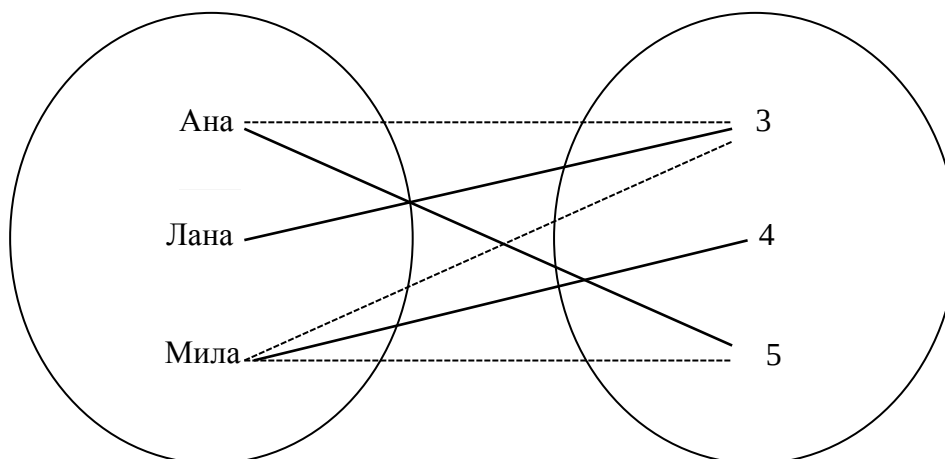
Пошто се креће уназад, стрелице ће бити у супротном смеру као и наведене рачунске операције. Дакле: број 4 се увећава 100 пута, потом добијени број умањује 2 пута, онда, нови број умањује за 50, затим се добијени број умањује 10 пута, те нови број увећава 2 пута, на крају се добија број 30. На тај начин се дошло до броја који је Ана замислила.

Одговор: Ана је замислила број 30.

Пример 32. На писменом задатаку из математике није било јединица и двојки. Помозимо Ани, Лани и Мили да закључе које су оцене добиле, ако знамо да су добиле различите оцене и Ана није добила тројку, а Мила није добила ни тројку ни петицу.

Решење: За овакав проблем најадекватније је користити методу графа.

У овом примеру користиће се Венов дијаграм где ће један скуп чинити ученице Ана, Лана и Мила, а други скуп чиниће оцене које су оне могле добити (3, 4 или 5). У задатку је назначено да јединица и двојки није било. Пуна линија повезаће ученицу која је добила дату оцену, а испрекидана линија повезаће ученицу и оцену коју она није добила.

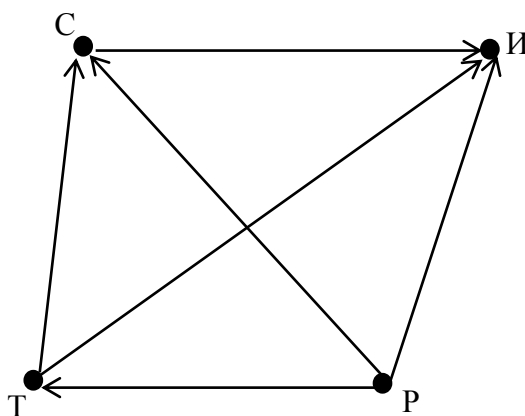


Пошто Мила није у релацији са 3 и 5, она мора бити у релацији са 4. Пошто Ана није у релацији са 3, а не може бити у релацији ни са 4 (јер је Мила у релацији са 4) онда је она у релацији са 5. На крају преостаје да је Лана у релацији са 3.

Одговор: Ана је на писменом задатку из математике добила оцену 5, Лана оцену 3 и Мила оцену 4.

Пример 33. У бициклистичкој трци учествовали су Саша, Иван, Раша и Тодор. Саша је био бржи од Ивана, али не и од Раше, док је Тодор стигао одмах иза Раше. Које место је који тркач у овој бициклистичкој трци заузео?

Решење: Користиће се метод графа (оријентисаног графа). Ова стрелица $\longrightarrow$ представљаће релацију „је бржи од“. Конкретније $A \longrightarrow B$, значи A је бржи од B , тј. A је испред B .



Пошто је Саша бржи од Ивана, а није бржи од Раше, стрелицу ћемо повући од Саше до Ивана и од Раше до Саше. Како је Тодор стигао после Раше стрелицу ћемо повући од Раше ка Тодору.

На графу је јасно уочљиво да треба повући и следеће стрелице:

- од Тодора до Саше (Раша је бржи од Тодора и Саше, али је Тодор стигао после Раше, што значи да је Тодор бржи од Саше);

- од Тодора до Ивана (Тодор је бржи од Саше, а Саша од Ивана што значи да је Тодор бржи од Ивана);

- од Раше до Ивана (Раша је бржи од Тодора и Саше, а они од Ивана, што значи да је Раша бржи од Ивана).

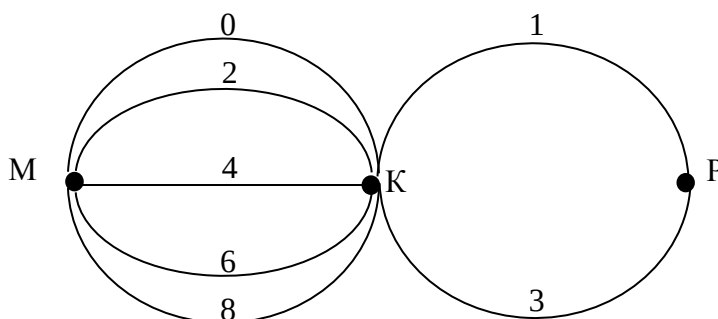
Одговор: Раша је заузео прво место, Тодор друго, Саша треће и Иван четврто.

Метод фокусног дијаграма

Дејић и Егерић (2010) јасно наводе да при решавању проблема у почетној настави математике понекад је потребно према утвреном правилу поређати одређене елементе скупа, птом, одредити укупан број свих могућих распореда неких објеката или пронаћи одговарајући поступак према коме су распоређени одређени објекти, у свему томе круцијелну улогу одиграва метода фокусног дијаграма. Споменути методу одликују прикази у виду гужи и кривих линија које имају заједнички почетак и крај. Како бисмо јасније видели о чему је реч, у том смислу ће нам помоћи следећи примери.

Пример 34. Колико има двоцифрених бројева код којих је цифра десетица дељива са 2, а цифра јединица непаран број мањи од 5?

Решење: Сходно услову задатка на месту цифре десетица могу бити бројеви 0,2,4,6 и 8, а на месту цифре јединица могу бити бројеви 1 и 3. Дати подци се илустративно приказују на следећи начин:

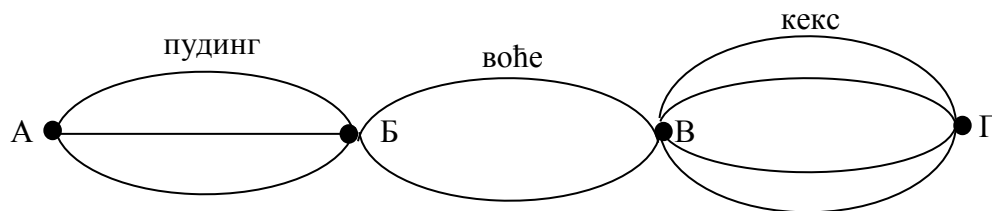


Линије које се повлаче од М до К оличење су цифре десетица, док су линије које се повлаче од К до Р цифре јединица. Са слике се види да на месту десетица може бити пет цифара, док у оквиру цифре јединица постоје две могућности, што значи да је укупан број двоцифрених бројева који испуњавају постављени услов једнак $5 \cdot 2$, а то је 10. Дакле, ти бројеви су: 10, 12, 14, 16, 18, 30, 32, 34, 36 и 38.

Одговор: Двоцифрених бројева код којих је цифра десетица дељива са 2, а цифра јединица непаран број мањи од 5 има 10.

Пример 35. Каћи је данас рођендан и њена мама је одлучила да јој направи тарту. Од састојака она има: три врсте пудинга, две врсте воћа и четири врсте кекса. Да би направила тарту мора помешати сваки од наведених састојака. Колико различитих торти Каћина мама може направити?

Решење: Према услови задатака јасно се види да Каћина мама може комбиновати три врсте пудинга, две врсте воћа и четири врсте кекса. Графички приказ према датим подацима изгледао би у форми фокусног дијаграма на следећи начин:



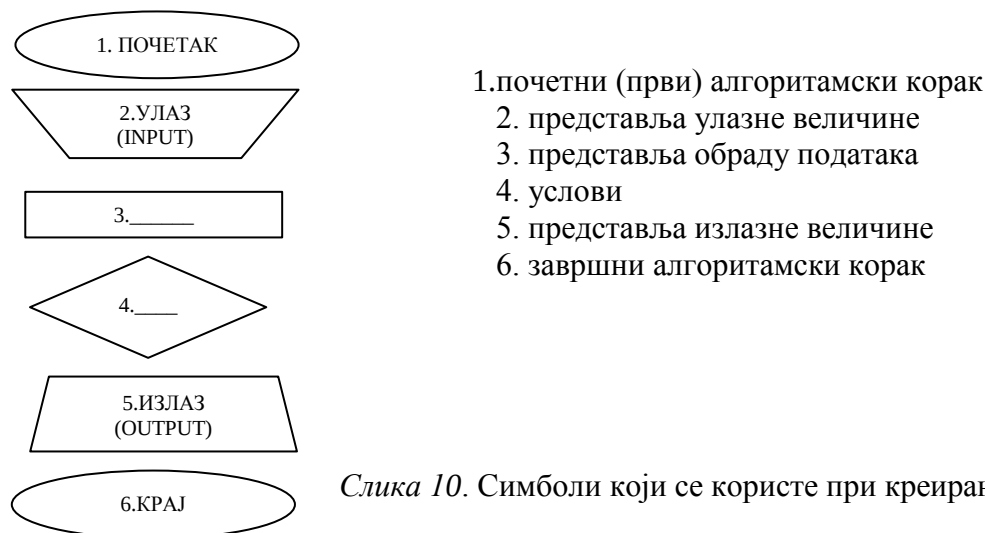
Линије од А до Б представљају врсте пудинга, од Б до В врсте воћа и од В до Г представљају врсте кекса. Са слике се јасно види да Каћина мама може направити $3 \cdot 2 \cdot 4$, односно 24 врсте торти.

Одговор: Каћина мама може направити 24 врсте торти.

Метод блокдијаграма

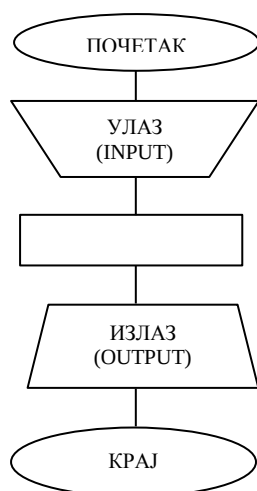
Да би се одређени проблем решио неопходно је испоштовати след претходних корака који нас воде до његовог тачног решења. Дакле, после сагледавања проблема и уочавања познатих елемената који су у њему дати, па преко математичког моделовања (увођења модела) доћи ћемо до открића непознатих и тражених података. Како би ученици успешно решили проблем морају сачинити адекватан алгоритам који ће им у томе помоћи. Алгоритам представља скуп поступака којим се уз помоћ познатих елемената, посредством одређеног скупа правила долази до решења. Сваки корак неког алгоритма назива се алгоритамски корак. „Логички низ алгоритамских корака помоћу којих се долази до решења постављеног проблема може се представити графички, односно геометријски, помоћу алгоритамске схеме или блокдијаграма“ (Милинковић, 2013: 94-95).

Пинтер (1995) говори о основним етапама формирања блокдијаграма, те даје илустративни приказ креирања блокдијаграма на следећој слици (слика 10):

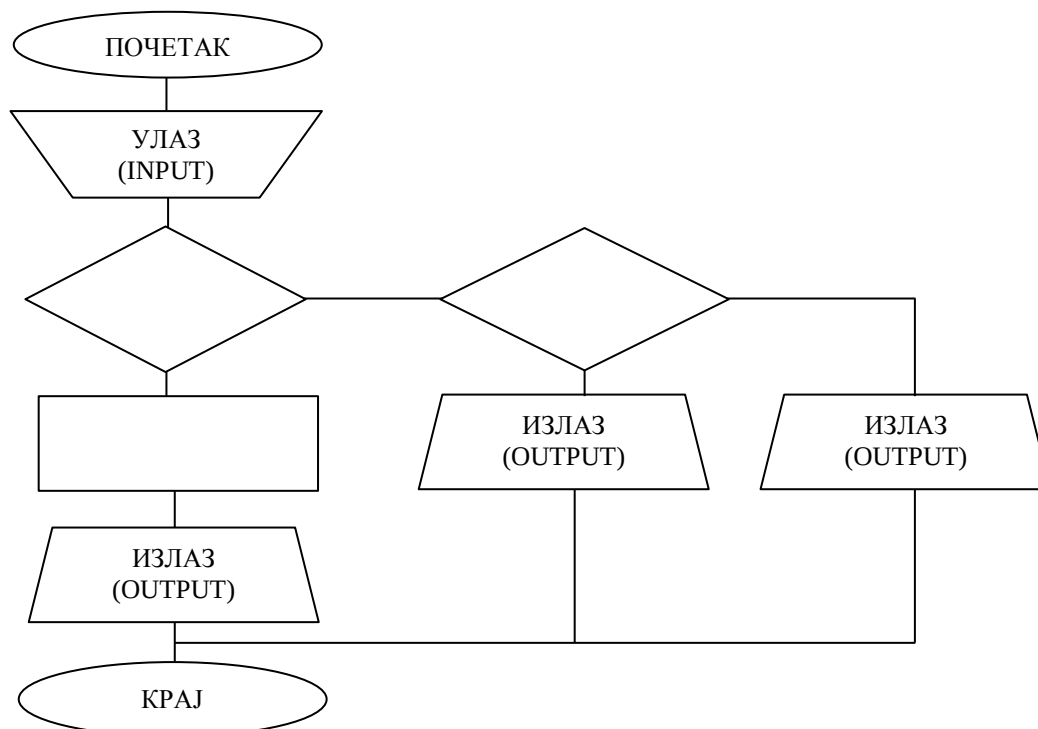


Слика 10. Симболи који се користе при креирању блокдијаграма

У почетној настави математике углавном је значајна примена простог линијског и разгранатог линијског блокдијаграма. На наредним сликама видећемо споменуте врсте блокдијаграма с обзиром на структуру.



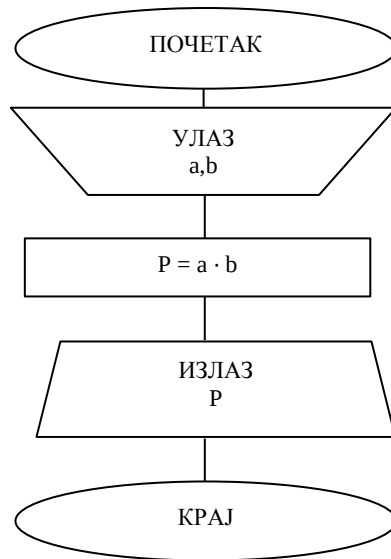
Слика 11. Проста линијска структура блокдијаграма



Слика 12. Линијска разграната структура блокдијаграма

Пример 36. Састави алгоритам у виду блокдијаграма за израчунавање површине правоугаоника чије су странице a и b ($a, b \in \mathbb{N}$).

Решење: Алгоритам израчунавања површине правоугаоника чије су странице a и b у вербалном смислу исказујемо на следећи начин: површина правоугаоника једнака је производу дужина његових страница ($P = a \cdot b$). Блокдијаграм изгледаће на следећи начин:



2.5. Методички аспекти математичког моделовања

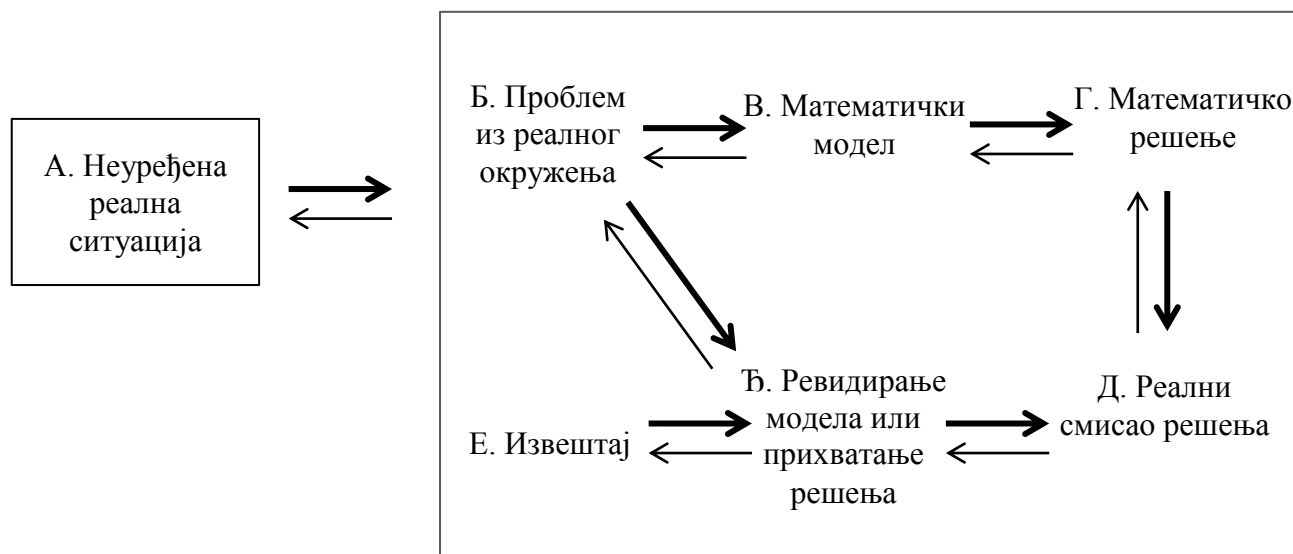
Како би ученици успешно решавали проблеме који се пред њима налазе, потребно је поступке њиховог решавања заснивати на провереним теоријским основама уз примену адекватних математичких модела и метода. Максимално мисаоно ангажовање ученика од велике је важности за савладавање бројних проблема и изналажење њихових решења. Милановић и Милановић-Јовановић (2002) јасно указују на правила која треба спроводити при решавању проблема, а која ће допринети подстицању и развоју способности математичког моделовања: (1) увек треба тежити томе да ученици самостално логички расуђују и тако дођу до решења одређеног проблема; (2) ученике је потребно упућивати да самостално врши избор метода које ће му помоћи при решавању проблема, те их треба подстицати да изналазе различите начине за њихово решавање; (3) није ефикасно решити што више проблема што брже, много је делотворније ваљано решити нпр. два проблема; (4) приликом избора проблема мора се водити рачуна да у њему постоје извесне тешкоће за које ће ученик уложити напоре да их савлада и превазиђе; (5) многим ситуацијама је својствено да није потребно формулисати питање, већ одмах кренути од проблемске ситуације, а ученицима омогућити да поставе питање, односно, формулишу проблем; (6) пожељно је вршити проверу тачности решења одређеног проблема.

Како бисмо расветлили основна методичка обележја моделовања у почетној настави математике, у наредном тексту говорићемо о фазама математичког моделовања, док ће нашу пажњу заокупити и врсте и нивои помоћи коју наставници могу пружити ученицима кроз имплементацију проблемске наставе у циљу развоја способности математичког моделовања.

2.5.1. Фазе математичког моделовања

Математички модели испуњавају реални свет, док процес моделовања помаже да ученици боље упознају тај свет и уједно развијају позитиван став према настави математике. Кроз поступак моделовања ученици покушавају да разумеју одређене математичке теорије и законитости, те усвајају нова и трајна знања која се могу примењивати у новим ситуацијама и околностима. Најсложенији проблеми могу се решети само добро формираним и конструисаним стратегијама и алгоритмима, а да бисмо то постигли у помоћ ће нам притећи математичко моделовање.

Трансформисање реалних проблема у математички контекст ученике наводи да ангажују своје мисаоне напоре, разговарају о проблему, анализирају решења проблема, међусобно дискутују о могућностима решавања, доказуу и примењују своја решења (Будински, 2013). Међутим, да би процес моделовања текао адекватно и несметано потребно је размотрити фазе које одликују тај процес. Сам процес и поступак моделовања према Стилман и сарадницима (Stillman et al., 2010) конструисан је седам шест фаза које су представљене уз помоћ следеће шеме.

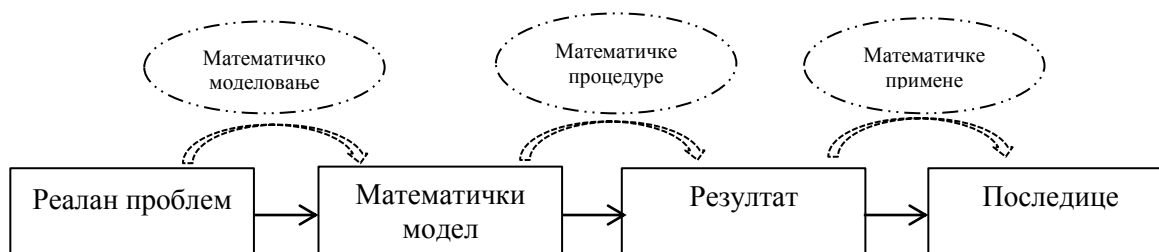


Слика 13. Фазе у математичком моделовању (Stillman et al., 2010:1)

Кроз даљи текст објаснићемо основне одлике и карактеристике сваке фазе у представљеном дидактичком кругу моделовања. Прву фазу (А) чини неуређена реална ситуација која се путем разумевања, структурирања и поједностављивања претпа у другу фазу (Б) односно у проблем из реалног окружења. Дакле, математичког моделовање започиње реалном ситуацијом која је својствена свакодневном животу и искуству ученика. У овој фази наставник може ученицима поставити неколико питања која су релевантна проблему, како би их усмерио на прави пут којим ће стићи до решења. Прилагођавањем реалног проблема математичким садржајима уз претпоставке и математичко формулисање ученици ће доћи до треће фазе (В) коју одликује математички модел. Приликом настанка математичког модела тежи се његовом формулисању, након чега ученици самостално конципирају своје стратегије и алгоритме уз помоћ којих ће решити проблем.

Четврту фазу (Г) одликује математичко решење до кога се дошло путем добро осмишљеног алгоритма кроз математички рад (рачунањем). У овој фази ученици би требало да формирају план на основу кога ће своје нове осмишљене начине повезати са претходним знањима и искуствима. Даље, до решења реалног проблема ученици ће доћи интерпретацијом добијених математичких резултата и тумачењем тих резултата кроз контекст реалног проблема. Решење реалног проблема, уједно је и пета фаза (Д) математичког моделовања и она заправо настаје као последица свих претходних фаза. Кроз анализу, проверу и упоређивање добијеног решења врши се разматрање у смислу да ли се модел прихвата или одбија и тиме се стиже до шесте фазе (Ђ). У оквиру ове фазе отварају нам се два пута: први, ако се модел прихвата и други, ако се модел одбија. Уколико је модел прихваћен подстиче се дискусија уз помоћ које ћемо потврдити валидност добијеног решења, те долазимо до последњег, седмог корака где се приступа писању извештаја. С друге стране, ако се модел не прихвати и покаже се као неадекватан, тежи се провери поступка целокупног алогоритма, врши се модификовање старе или конструисање нове стратегије, те се поново враћа у другу фазу моделовања. У седмој фази, која се односи на писање извештаја ученици би требало да презентују своје резултате с циљем бољег и дубљег сагледавања и разумевања постављеног проблема.

Клауди (Claudi, према: Милинковић, 2014) даје сличан приказ циклуса математичког моделовања као и Стилман, према коме математичко моделовање такође започиње постављањем проблема реалне ситуације.



Слика 14. Шематски приказ процеса математичког моделовања

Прва фаза математичког моделовања коју представља Клауди такође је заснована на представљању реалног проблема који је сагласан свакодневном животу ученика. Даље се путем одабира адекватног модела долази до математичког модела, који се уз помоћ математичких симбола, формула и процедура стапа у резултате, које је неопходно проверити и утврдити да ли су у складу са постављеном проблемском ситуацијом, те тада одлучујемо да ли дати модел задржавамо или приступамо новом поступку моделовања. Видимо да се за сада обе наведене шеме процеса математичког моделовања преклапају и допуњују. Милинковић (2014) математичко моделовање представља процес који се састоји из следећих фаза:

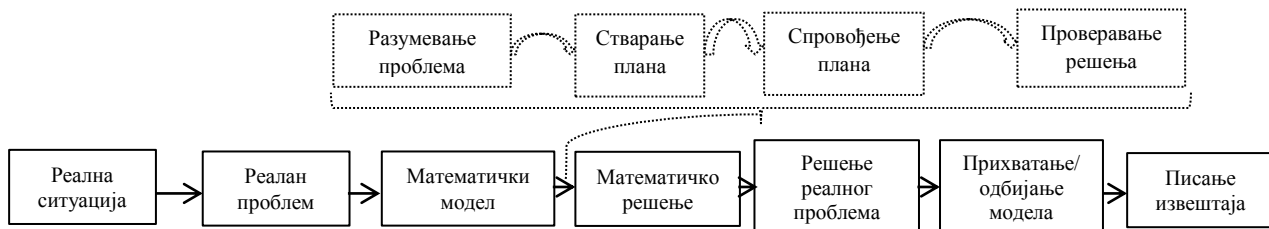
1. анализа модела;
2. конструкција и креирање модела;
3. манипулација моделом и
4. тумачење модела.

Кабасут (Cabasut, 2010) наводи пет етапа кроз које пролази математичко моделовање: (1) конструкција модела; (2) посматрање модела са различитих аспеката; (3) разумевање суштине проблема и увиђање односа и веза између формалног јаезика (науке) и математичких представа; (4) постављање релација и адекватних шема; (5) интерпретација.

Ђорђе Поља (Polya, 1975) у својој књизи „Како решити проблем?“, даје структуру решавања проблема која се врло лако интегрише са фазама математичког моделовања које предлаже Стилман:

1. разумевање проблема;
2. разрађивање и стварање плана;
3. спровођење плана;
4. проверавање решења.

Кроз следећи текст објаснићемо како тече прелазак из једне фазе моделовања у другу, под руководством смерница релевантних решавању проблема које даје Поља у споменутој књизи. Сливни приказ могао би да изгледа овако:



Слика 15. Интеграција решавања проблема и математичког моделовања

Да би се прешло из реалне ситуације у реалан проблем доминантна је улога наставника, тако да нећемо много пажње придавати овом поступку. Даље, пут води од реалног проблема до математичког модела, где наставници треба да се увере да су ученици разумели проблем, што је одлика Пољине прве етапе у решавању проблема. У том смислу Поља предлаже следећа питања, која ће ученицима помоћи да схвате реални проблем и приступе разради плана уз помоћ кога ће добити математички модел: „Шта су подаци које смо добили у реалном проблему? Да ли су подаци довољни да се изведу закључци или су недовољни, сувишни и контрадикторни? Шта су услови у реалном problemu, а шта су математички услови?“ (Polya, према: Будински, 2013: 127). Разрађивање плана уз помоћ кога ће ученици формирати математички модел, може се остварити упућивањем ученика на неки сличан проблем са којим су већ имали искуства. С друге стране од ученика се може захтевати да се фокусирају на услове који су дати у реалном problemu, те да процене до које мере се ти услови у виду непознатих чињеница могу мењати. Такође је битно да ученик приликом разраде плана уочи имплицитне податке, јер су они карактеристика прелска из реалног у математички контекст (Polya, 1975). Да би се разрађени план реализовао Фројдентал (Freudenthal, 1968) сматра да ученици кроз процес хоризонталне математизације треба да повежу реални и математички модел.

За прелазак из фазе математичког модела у фазу математичког решења важно је спровести све етапе решавања проблема које предлаже Поља. У овом подручју значајна је вертикална математизација која се односи само на математички смисао. Реализација плана резултира са добијањем математичког решења, које ствара пут до решења реалног проблема. Пошто добијено математичко решење не мора увек бити и решење реалног проблема потребно је добијено решење проверити и испитати да ли може бити од користи и у неком другачијем problemu. Приликом проверавања решења долазимо до фазе у којој се модел прихвата или добија, ако се прихвата приступамо извештавању, док у супротном ученици се поново морају вратити у стање разрађивања плана (Будински, 2013).

Као што видимо фазе које предлажу претходно истакнути аутори углавном се садрже једна у другој или допуњују једна другу. Међутим, ми ћемо се одредити за етапе које предлаже Пинтер (1997):

1. „одређивање оригинала,
2. анализа оригинала,
3. одлука о увођењу модела,
4. изградња информационе базе за моделовање,
5. дефинисање модела,
6. испитивање на моделу,
7. пренос информација са модела на оригинал,
8. верификација добијених информација на оригиналу,
9. модификација модела“ (стр. 12).

На самом почетку спровођења процеса математичког моделовања приступамо одређивању оригинала и његовој анализи, где се испитивањем оригинала долази до фундаментаних сазнања о њему. Након добијених основних информација о оригиналу, ако је даље директно испитивање немогуће, креће се путем индиректних метода и доноси се одлука о увођењу модела. Прикупљањем неопходних информација о оригиналу изграђује се информациона база за моделовање уз помоћ адекватних математичких и логичких релација. Најбитнија фаза у процесу стварања модела јесте његово дефинисање које прати утврђивање веза и односа између елемената у оригиналу и моделу. Потом се врши испитивање на моделу у смислу његове примене и решавања. Поступак испитивања оригинала своди се на математичке објекте, релације и операције. Информације које су добијене о моделу даље се преносе на оригинал. Затим се врши верификација добијених информација на оригиналу, тачније приступа се провери решења како у математичком тако и у текстуалном контексту проблема. Последња фаза односи се на модификацију модела која је значајна само у случају ако решење проблема није тачно. У супротном ова фаза се елиминише (Милинковић, 2013). Како бисмо зашли у срж фаза којима се треба руководити приликом спровођења процеса математичког моделовања, тај процес ћемо представити кроз следећи пример.

Пример 37.

Читање или слушање текста постављеног проблема.

Богдан за 1200 динара може да се купи 12 паковања сличица. Колико паковања сличица Богдан може да купи за 2000 динара?

Анализа проблема уз утврђивање информација које су дате у њему:

- Богдан има 2000 динара;
- за 1200 динара Богдан може да купи 12 паковања сличица;

Ученици схватају да је проблем сложен те закључују да је потребно увести модел који ће им помоћи да тај проблем реше. Који модел увести? Којом методом доћи до решења проблема?

- Метода једнчина?
- Метода дужи ?
- Метода инверзије?

Претпоставимо да је изабрана метода једначина.

Пошто не знамо колико паковања сличица Богдан може да купи за 2000 динара, број паковања сличица обележићемо са x . Оно што нам је познато јесте да Богдан за 1200 динара може да купи 12 паковања сличица.

Дефинисање модела састоји се у постављању одговарајуће једначине:

$$1200 : 12 = 2000 : x$$

Ученици испитују модел и долазе до решења проблема:

$$1200 : 12 = 2000 : x$$

$$100 = 2000 : x$$

$$x = 2000 : 100$$

$$x = 20$$

На основу решења модела изводи се закључак да Богдан за 2000 динара може да купи 20 паковања сличица.

Верификација решења на оригиналу:

Ако за 1200 динара Богдан може да купи 12 паковања сличица, то значи да једно паковање сличица кошта $1200 : 12$, односно 100 динара. Дакле, за 20 паковања сличица Богдану је потребно $20 \cdot 100 = 2000$ динара, што је у складу са условима у постављеном проблему.

Модификација модела није потребна јер је решење проблема тачно.

2.5.2. Врсте и нивои помоћи од стране наставника путем проблемске наставе при развоју способности математичког моделовања

Како би проблемска настава била ефикасна у погледу остварења предодређених циљева, Цех (Zech, 1999) указује на неопходност услова за решавање проблема у настави математике где у први план ставља диференцирану помоћ наставника, по принципу минималне помоћи коју смо већ спомињали у неколико наврата у претходном тексту. Он говори о четири нивоа минималне помоћи од стране наставника: (1) Први ниво односи се на мотивациону помоћ; (2) Други ниво подразумева помоћ у повратној информацији; (3) Трећи ниво помоћи односи се на општестратегијску помоћ; (4) Стратегијска помоћ усмерена на садржај одлика је четвртог нивоа; (5) Пети ниво има улогу садржајне помоћи. Осим Цеха, принцип пружања минималне помоћи од стране наставника ученицима уважавају и многи други аутори (Eigler & Judith, 1973; Riedel, 1973), те они такође сматрају, да такав вид подршке ученицима може бити од велике користи приликом решавања проблема.

Пошто су наведене врсте помоћи поређане хијерархијски, јасно да је мотивациона помоћ најнижег нивоа (најслабија), док је садржајана помоћ, највишег нивоа (најснажнија). У вези са тим Милинковић (2013: 157-159) приказује примере наставниковог обраћања ученицима кроз нивое помоћи:

1. С обзиром да мотивациона помоћ подразумева један вид охрабривања ученика од стране наставника и усмеравања на активност наставник може рећи: „успећеш да решиш задатак“, или „задатак није пуно тежак“.
2. Помоћ у повратној информацији садржана је у обавештавању ученика о томе да ли примењује адекватну стратегију приликом решавања проблема, тачније да ли је одабрао адекватан модел. Наставниково обраћање може изгледати овако: „одабрао си исправан алгоритам“, или „негде си погрешио“.

3. Општестратегијска помоћ назива се још и „помоћ усмерена на процес“, јер наставник води рачуна да се испоштују правила о начинама решавања проблема која су заснована на Пољиној концепцији о којој смо раније говорили. Наставник може рећи: „издвој познате податке у задатку“ или „погледај добро дате податке у задатку“.
4. Стратегијска помоћ усмерена је на садржај у којој наставник наводи ученике на методе и начине уз помоћ којих ће решити постављени проблем. Наставник може рећи: „решити задатак методом једначина“, или „покушај логички решити задатак“.
5. Најзад, садржајна помоћ посматрана као високофреквентна подразумева конкретизацију упутстава и правила неопходна за увиђање веза и односа између делова и целине проблема, које наставник може дати ученицима. Ова врста помоћи назива се још и „помоћ усмерена на резултат“. На пример, наставник може рећи: „покушај уз помоћ обима и ширине израчунаати дужину правоугаоника“, или „потребно је да израчунаш дужину правоугаоника“.

Свака помоћ коју наставник пружа ученицима разликује се с обзиром на директност. Дакле, може бити директа или индиректна. Следећа табела помоћи ће да уочимо јасне разлике између директног и индиректног пружања помоћи ученицима.

Табела 10. Приказ релевантних примера нивоа помоћи кроз реченице којима се наставник може обраћати ученицима с обзиром на директност

Врста Ниво	директна	индиректна
Мотивациона помоћ	„Сигурно ћеш стићи до тачног резултата“.	„Овај задатак није баш пуно тежак“.
Помоћ за повратну информацију	„Погрешио си приликом сабирања“.	„Направио си негде грешку“.
Општестратегијска помоћ	„Шта је познато, а шта је оно што је непознато?“	„Прочитај боље задатак и погледај податке у њему!“
Стратегијска помоћ	„Потруди се да решиш задатак методом једначина“.	„Можда успеш да решиш задатак методом једначина“.
Садржајна помоћ	„Најпре израчунај умањеник на основу познате разлике и умањеоца“.	„Потребно је да израчунаш умањеник“.

Пошто је већ било речи о јакој повезаности проблемске наставе и математичког моделовања сада ћемо ту корелацију приказати кроз пример, те указати на помоћ која се ученицима може пружити у процесу решавања проблема.

Пример 38. Саша је има одређен број кликера. Тата му је дао 5 кликера, а мама 2 пута више од тате и сада Саша има 55 кликера. Колико је Саша имао кликера на почетку?

Прва фаза спровођења проблемске наставе представља стварање проблемске ситуације и формулисање проблема, што подразумева одређивање и анализу оригинала у математичком моделовању. Проблемска ситуација је задатак који смо поставили и оличење је реалне ситуације, док је читање или слушање текста задатка прва фаза у моделовању.

Друга и трећа фаза проблемске наставе односе се на формирање хипотеза и декомпозицију проблема што обухвата анализу проблема, потребу за увођењем модела и изградњу информационе базе за моделовање.

- Саша је имао одређен број кликера.
- Тата му је дао 5 кликера.
- Мама му је дала 2 пута више од тате.
- Сада Саша има 55 кликера.

I ниво помоћи од стране наставника: „Издвој све познате податке који се налазе у постављеном задатку“.

Пошто је установљено да је проблем сложен приступа се размишљању о одабиру модела. Који модел увести и коју методу искористити за решавање проблема?

- Методу једначина?
- Методу инверзије?
- Методу дужи?

II ниво помоћи од стране наставника: „Опреди се за начин решавања проблема (модел и методу)“.

Претпоставимо да је изабрана метода једначина.

Број кликера који Саша има пошто је напознат обележићемо са x . Познато је да му је тата дао 5 кликера, а мама 2 пута више од тате и сада Саша има познат број кликера (55).

Четврта фаза проблемске наставе односи се на решавање проблема што је код моделовања дефинисање модела и његово испитивање и решавање. Представљање проблема помоћу једначине:

$$\begin{aligned}x + 5 + 2 \cdot 5 &= 55 \\x + 5 + 10 &= 55 \\x + 15 &= 55 \\x &= 55 - 15 \\x &= 40\end{aligned}$$

III ниво помоћи од стране наставника: „Постави одговарајућу једнакост и одреди x “.

Пету фаза проблемске наставе чини анализа резултата, извођење закључака и генерализација, док у моделовању имамо пренос информација са модела на оригинал и верификација добијених информација.

На основу решења изводи се закључак: Саша је на почетку имао 40 кликера.

Ако је Саша имао 40 кликера и тата му дао још 5 ($40 + 5 = 45$) тада ће их Саша имати 45, пошто му је мама дала два пута више од тате ($2 \cdot 5 = 10$) односно још 10 кликера, тада ће Саша имати ($45 + 10 = 55$) 55 кликера, што је у складу са претпоставкама задатка. Пошто је констатовано да је решење тачно нема потребе вршити модификацију модела. Последња фаза проблемске наставе односи се на примену стечених знања у новим ситуацијама и има велики удео у трансферу знања кроз друге математичке области и садржаје.

Милинковић (2013) сматра да сама структура представљене хијерархијске помоћи одговара идеалним условима и врло је тешко остварива, међутим прилагођавање одређене помоћи тренутној ситуацији, могућностима и способностима ученика свакако ће бити како од великог значаја ученицима тако и при постизању постављеног циља. Првановић (1958) истиче да ученици прво морају самостално приступити проблему, без претходних конкретних упутстава од стране наставника, јер помоћ може бити једино функционална ако наступи после његовог ангажовања и улагања труда и напора да савлада одређену тешкоћу.

Помоћ ученику треба пружити у оном тренутку када се он нађе на раскрсници, односно када се нађе у ситуацији да изабере исправан пут којим ће да крене и доведе га до исправног решења. Када је ученик добро сагледао проблем и добро се задубио у његов садржај, те наишао на неку преперку понекад само једна реч наставника може учинити да му нешто нејасно постане јасно или непознато можда познато и тако његова мисао може кренути исправним путем.

4. Алгебарске основе

Алгебра се третира као врло битна област математике која своју примарну улогу остварује кроз подстицање и развој математичког мишљења с једне стране, односно подразумева посебан језик математике у виду симбола и слика (графикони, табеле) с друге стране (Stacey & MacGregor, 2000). Да бисмо уопште говорили о алгебарским основама и указали на њену важност најпре ћемо сагледати дефиниције које одликују појам алгебре.

Многи научници (Usiskin, 1997; Van Amerom, 2003; Kieren, 2004) су дефинисали појам алгебре и тих дефиниција је много, међутим основа и суштина сваке је иста. Ми ћемо се определити за ону коју дају Меклејн (MacLane) и Биркоф (Birkoff) који алгебру виде као „уметност манипулисања, збировања, производима и степенима бројева. Правила манипулација важе за све бројеве, тако да манипулације могу бити изведене и на словима која стоје уместо бројева“ (Wits & Demana, према: Harvey et al., 1995: 75). „Алгебра је метод проучавања величина помоћу општих карактера који се називају симболи“. Алгебра се посматра као наука која нас подучава како се могу одредити непознате величине уз помоћ оних величина које су познате (Katz, 1995:20). У најопштијем смислу алгебра се може поделити на елементарну и апстрактну. Према Садовском и Сеси (Sadovsky & Sessa, 2005) „елементарна алгебра бави се проучавањем односа између величина“ (стр.90). Елементарна алгебра у свом домену изучава својства математичких операција, док је апстрактна алгебра фокусирана на проучавање алгебарских структура као што су групе, прстени и поља (Weyl, 1995).

Блантон и сарадници (Blanton et al., 2011) тврде да су математичке структуре и односи који владају међу њима кључни елементи у подручју ране алгебре.

Црвенковић и Романо јасно истичу да се алгебра бави процесима о апстрактним концептима, те с тим у вези доминантну улогу имају концептуалана (знања која се односе на разумевање одређеног концепта) и процесуална математичка знања (знања која се односе на разумевање процеса у тим концептима) (према: Цвијановић, 2016). „Алгебра је начин размишљања. Успех у алгебри зависи од најмање шест врста развоја математичких способности као што су: генерализација, апстракција, аналитичко размишљање, динамичко размишљање, моделовање и организација“ (Lew, према: Kieran, 2004: 146) . Да би ученици разумели језик алгебре најпре морају имати предиспозиције за адекватан развој и подстицање алгебарског мишљења, о чему ће бити речи касније (Cai & Knuth, 2011).

Ми ћемо посебан акценат ставити на рану алгебру, јер је она својствена почетној настави математике, те с тим у вези споменућемо појединости које подразумева рана алгебра, а предлаже их Капут (Kaput, 2000):

- у домену ране алгебре врши се генерализација шаблона, односа и веза између структура;
- подстиче се функционално размишљање;
- развија се способност математичког моделовања;
- истиче се манипулација формулама;
- врши се проучавање структура.

Карпентер и Леви (Carpenter & Levy, 2000) говоре о две основне одлике алгебре а то су:

- генерализација;
- значајна је употреба симобла у смислу представљања математичких идеја и решавању проблема.

Рана алгебра не треба да се посматра само као рано увођење одређених алгебарских садржаја у наставу математике, она с друге стране поседује врло значајне одлике према којима се разликује од такозване комплексне алгебре која је својствена старијим разредима. Те одлике су засноване на : (1) утемељењу ране алгебре на проблемским ситуацијама које имају велики значај у овладавању базичних алгебарских појмова од стране ученика; (2) одговорности коју рана алгебра има у оспособљавању ученика да променљиве схвате као симболе; (3) корелацији коју рана алгебра остварује са другим областима у почетној настави математике; (4) једноставности проблемских ситуација са којима се ученици сусрећу (Carragher et al., 2007). Дакле, рана алгебра ученике постепено и поступно оспособљава да усвоје и разумеју основне алгебарске нотације које ће им бити потребне при изналажењу решења неких нових једноставних проблемских ситуација, а на каснијем узрасту и при сусрету са комплексним алгебарским ситуацијама. Многи аутори (Carragher & Schliemann, 2007; Cai & Knuth, 2011 ; Pittalis et al., 2014) на рану алгебру гледају као на мост који повезује аритметику и алгебру што помаже премештавању јаза између ове две области. Ови аутори остварили су консензус када су у питању следеће компоненте које посредују између алгебре и аритметике: (1) увиђање односа између непознатих величина помаже при решавању проблема помоћу једначина и слова; (2) трансформација аритметичких нотација у алгебарске подстиче генерализацију; (3) употреба разноврсних алгебарских симбола помаже при извођењу генерализација.

3.1. Историјски развој алгебре

Бавећи се историјом математике преплићу се две струје аутора: прву струју чине они који сматрају да порекло алгебре потиче од Асираца, Египћана и Вавилонца, док другу струју чине аутори који заступају став да су алгебарски темељи постављени у школама у Александрији (Garcia & Piaget, 1989). Клајн (Kline, 1972) такође заступа став аутора прве струје и објашњава да се алгебра најпре почела користити у Месопотамији и Египту. Међутим, Гарција и Пијаже (Garcia & Piaget, 1989) истичу да су многи „геометријски проблеми грчке математике управо настали због недовољног познавања алгебре“ (стр. 143). Различити списи старих Грка потврђују чињеницу да алгебра почива на темељима геометрије и аритметике, јер су они помоћу геометријских модела решавали бројне аритметичке и алгебарске проблеме (Липковски, 2007).

Кијеран (Kieran, 1992) говори о три етапе према којима је текао развој алгебре, а то су:

1. „Реторичка алгебра;
2. Синкопирана алгебра,
3. Симболичка алгебра“ (стр. 390-391).

Реторичка алгебра подразумева алгебру која се заснива на речима. Дакле, у овом периоду проблеми су се решавали вербалним путем, описивањем кроз реченице. Овом периоду припада математика старе Грчке па све до Диофанта, арапска и европска математика. Реторичка алгебра представља период математике све до 16 века. Пошто је ово период грчке математике споменућемо и грчку геометрију која је оставила значајан траг у развоју алгебре (Sfard, 1995). Према Клајну (Kline, 1972) величине којима су представљене дужина, ширина, површина и запремина први је увео Еудокс који је посебно наглашавао да тим величинама не треба придодавати бројевна обележја.

Синкопирана алгебра развија се у Египту и Месопотамији захваљујући Питагори, Еуклиду и Диофанту. Оно по чему се овај период разликује од реторичке алгебре јесте што се за представљање алгебарских појмова уместо речи користе скраћенице. Диофант је први извршио модификацију реторичке алгебре и речи које су је описивале преточио је у адекватне скраћенице, такође код њега први пут срећемо и симболичке ознаке којима је представљао непознату (Sfard, 1995). Клајн (Kline, 1972) истиче да је Диофант свој највећи успех постигао уводећи у наставу алгебре прве симболичке представе. Овај период алгебре свој највећи процват доживљава у XVII веку, која је већ била добар почетак за настанак симболичке алгебре.

Корени симболичке алгебре датирају још из XVI века од радова Диофанта чију је вредност и значај препознао Франоса Вијет (Francois Viete 1540–1603) који је први бројеве заменио симболима. Велики значај у овом поглављу алгебре имао је и Декарт који је симболичку алгебру повезао са геометријом, где је геометријске фигуре објашњавао помоћу различитих алгебарских нотација. Касније је таква геометрија названа „аналитичка геометрија“. Целокупан развој алгебре све до XIX века није имао оправдану логичку основу. Пошто је алгебра посматрана као уопштена аритметика било је потребно изаћи из таквих оквира, те јој омогућити да се развија у складу са својим алгебарским законима, за такве идеје залагао се Пикок (George Peacock 1791–1858). Пикок је детерминисао симболичку алгебру посебно истичући да се манипулација симболима мора огледати кроз њихово модификовање и интеграцију (Sfard, 1995).

Бавећи се историјском генезом алгебре Сфард (Sfard, 1995) такође указује на три битна периода који одликују њен развој кроз време:

1. „Реторичка и синкопирана алгебра;
2. Вијетова, симболичка алгебра;
3. Апстрактна алгебра“ (стр. 18).

С обзиром на историјске фазе развоја алгебре Кијеран и Сфард заступају исту хијерархијску поделу, с тим што Сфард кроз своје фазе као последњу, наводи апстрактну алгебру. Ову епоху алгебре одликује настанак и утемељење алгебарског појма „група“, који је алгебри отворио пут развоја ка апстрактној структури (Sfard, 1995).

3.2. Алгебарско мишљење

Да бисмо говорили о алгебарском мишљењу и његовим основним одликама најпре ћемо објаснити појам математичког мишљења. Према различитим истраживања појам „математичко мишљење“ посматра се као врло комплексан, па се с тога његова прецизна дефиниција не може одредити. Управо због тога математичко мишљење се често доводи у везу са критичким, стваралачким или апстрактним мишљењем (Schwartz, 2000; Prescott, 2001). Маричић (2006) објашњава да математичко мишљење као врло сложен процес у својој основи обухвата и кртичко, и стваралачко, и логичко и апстрактно мишљење.

Првановић (1970) истиче да при развоју математичког мишљења битну улогу одиграва наставник чији је задатак да на часу математике са ученицима спроводи различите проблемске методе рада где ће ученик наспрам својих могућности, размишљањем успети да издвоји и објасни оно што је математичко. Прескот (Prescott, 2001) сматра да је значај оспособљавања ученика да мисле математички еквивалентан значају оспособљавања ученика да рачунају, тј. решавају различите типове математичких проблема.

Курник (2006b) заступа став да је подстицање и развој математичког мишљења од битног значаја за неговање трајности усвојених знања. Трајност знања омогућава ученику да своја претходно стечена знања примени у потпуно новим ситуацијама и тако врши трансфер знања. Тумачећи различиту литературу поред одредница математичког мишљења које смо у претходном тескту спомињали врло често смо се сусретали и са појмом „алгебарско мишљење“ (Carpenter & Levi, 2000; Kieren, 2004). Заправо, алгебарско мишљење одувек се посматрало као саставни део математичког мишљења (Романо, 2008). Увидом у релевантну литературу можемо истаћи да не постоји свеобухватна дефиниција која у потпуности објашњава овај појам, те с тим у вези кроз даљи ток рада о алгебарском мишљењу говорићемо са становишта различитих аутора. Капут (Caput, 2008) алгебарско мишљење објашњава као увиђање и представљање генерализација уз помоћ конвенционалног система симбола, док с друге стране укључује и способност расуђивања и манипулисања тим симболима.

С обзиром на основношколиски ниво ученика који је у домену нашег разматрања сматра се да су увиђање односа између величина, препознавање структура, извођење генерализација, решавање проблема, развој способности математичког моделовања и др. кључни сегменти који су важни за развој и подстицање алгебарског мишљења (Cai&Knuth, 2011).

Говоривши о алгебарском мишљењу Карахер и Шлимен (Carragher&Schliemann, 2007) објашњавају да је то облик психолошког поступка који има субјективни карактер, где га у првом плану повезују са аритметичким законима, променљивом и математичким моделовањем. Линс и Капут (Lins&Karut, 2001) истичу да адекватан развој алгебарског мишљења доприноси стварању подстицаја за неговање и развијање активности које су неопходне у решавању проблема с једне стране, док развој способности за извођење генерализација подразумевају као његов саставни део, с друге стране. Важност генерализације огледа се у корелацији између различитих стратегија решавања проблема и алгебарског мишљења. Заправо, способности за извођење генерализација чине мост између решавања проблема и алгебарског мишљења (Steele & Johanning, 2004).

Радфорд (Radford, 2011) сматра да је врло важно упућивати ученике на активности које подразумевају развој алгебарског мишљења јер ће таквим поступцима ученицима ова врста мишљења постати доступна. Зељић (2014) истиче да „развијање алгебарског мишљења у млађим разредима захтева развијање одређених начина мишљења укључујући анализирање односа између квантитета, решавање проблема, моделовање, уочавање структура, генерализацију, а затим и симболично изражавање“ (стр. 28).

„У фокусу ране алгебре је развијање алгебарског мишљења ученика у оквиру различитих тематских области (а посебно аритметике)“. Развој алгебарског мишљења у Републици Србији подстиче се од првог разреда основне школе, у коме се ученици први пут сусрећу са алгебарским појмовима (Зељић, 2014: 24). Линс и Капут (Lins & Karut, 2001) заступају став да је много ефикасније ученике научити да размишљају према алгебарским принципима него им декламовати и терати да уче алгебарске садржаје. Развој алгебарског мишљења прате различите способности ученика: „(1) размишљање симболичким језиком; (2) разумевање алгебарских појмова посредством уопштене аритметике; (3) доживљавање алгебре као одређени вид структура“ (Crawford, 2001, стр. 194).

3.3. Методички приступ изучавању алгебарских садржаја

Јединствен спој математичког мишљења и алгебарских идеја чини срж изучавања алгебре у почетној настави математике. Средства математичког мишљења подразумевају развијене вештине за: (1) решавање проблема, (2) моделовање и (3) закључивање. Док, с друге стране алгебарске идеје можемо такође посматрати на три начина: (1) алгебра као генерализација аритметике, (2) алгебра као врста језика, (3) алгебра као средство за успешно математичко моделовање (Kriegler, према: Цвијановић, 2016). Филоу и Ројано (Filloy & Rojano, 1985) указују на нераскидиву везу између алгебре и аритметике, која ствара могућности за боље разумевање алгебре. С тим у вези Кијеран (Kieran, 2004) истиче да прелаз између аритметике и алгебре мора бити постепен, а уједно и прилагођен ученику. Та адаптација ученика огледа се у следећем: (1) „пажњу више усмеравати на односе, а мање на израчунавање бројевних вредности; (2) бавити се разумевањем односа и веза између рачунских операција; (3) тежити концепцији и осмишљавању стратегија уз помоћ којих се одређени проблем може решити, а не одмах тражити решење; (4) бавити се и бројевима и словима, а не само бројевима; (5) подстицати ученике да правилно схвате знак једнакости“ (стр. 140 и 141).

Тол (Tall) и Томас (Thomas) говоре о три нивоа алгебре:

1. Евалуациона алгебра. Пошто су ученици имали доста потешкоћа приликом генерализације аритметике Тол и Томас су уз помоћ рачунара омогућили ученицима да без израчунавња схвате да за различите вредности A израз $A+2$ има другачије вредности. Рецимо ако одаберу на рачунару $A=3$, одмах им се покаже резултат 5. Такође, у оквиру овог нивоа ученици треба да разумеју да је израз $3 \cdot (A + 2)$ еквивалентан изразу $3 \cdot A + 6$, односно да ако у оба случаја замене A истом вредношћу резултат ће бити исти. С тим у вези ученици би могли да се позову и на закон дистрибутивности множења према сабирању, који је запроаво оличење претховног примера. На писање изрази на различите начине и препознавање еквивалентних изрази делују различите процедуре евалуације што је својствено евалуационој алгебри;

2. Манипулациона алгебра. Манипулација алгебарским изразима како би се решиле једначине облик је и оличење традиционалних школских програма. Учење алгебре уз помоћ процедура ученицима обезбеђује краткотрајна знања која нису сагласна будућем напретку и развоју.

3. Рецимо, израз $2 \cdot a + 3 \cdot b$ ученици обично схватају као „алгебру воћне салате“ где словима придају име неког објекта. Па рецимо $2 \cdot a + 3 \cdot b$ када додају на $4 \cdot a + 5 \cdot b$ покушавају да споје 2 јабуке са 4 јабуке, односно 3 крушке са 5 крушака и на крају добију израз $6 \cdot a + 8 \cdot b$, односно 6 јабука и 8 крушака. Међутим, проблем се јавља у изразу $2 \cdot a \cdot b$ где се не зна да ли су 2 јабуке или 2 крушке. Пошто овакав начин учења алгебре није ефикасан у дугорочном смислу, разумевање веза између иконичких и симболичких представа једначина може бити као један од адекватних начина за успешно учење алгебре.

4. Аксиоматска алгебра. Овај ниво алгебре односи се на векторске просторе и системе линеарних једначина, али у основи представља проширење манипулационе алгебре. Прелазак из елементарне алгебре у аксиоматску своди се на прелазак са закључака заснованих на искуству на закључке који почивају на аксиомама и доказима. Рецимо, запис „ $a + b = b + a$ “ што је иначе оличење закона комутативности који важи у овом случају за сабирање на елементарном нивоу не може се доказати иако је могуће користити различит искуства и визуелизације замењујући слова бројевима, док се на аксиоматском нивоу путем одређених претпоставки наведена једнакост врло лако може доказати. Такође у „аксиоматској математици сабирање и множење у алгебарским структурама као што су прстени и поља немају сличности са наведеним операцијама у аритметици“ (Tall & Thomas, 2001:6).

За потребе нашег рада посебно је значајан други ниво, односно манипулациона алгебра, јер ће једначине заокупити већи део наше пажње. Још од првог разреда основне школе у Републици Србији ученици се упознају са елементима алгебре. Дакле, у првом разреду ученици се упознају са појмовима непознате и једначине, потом у трећем разреду упознају са појмовима променљиве и неједначине, док се у четвртном разреду ученици оспособљавају да решавају једначине и неједначине у скупу N_0 . У првом разреду ученици се оспособљавају да „открију непознати број у једнакостима с једном операцијом“ (Правилник, 2017:25).

Према наставном програму за трећи разред основног образовања и васпитања један од оперативних задатака математике у трећем разреду је да ученици треба да „знају да решавају једноставније једначине у скупу бројева до 1000“, облика: „ $x \pm 13 = 25$, $125 - x = 25$, $5 \cdot x = 225$ “, али и неједначине облика: „ $x > 15$, $x < 245$ “.

„Програм предвиђа да се једначине и неједначине, као специјалне формуле, решавају паралелно са вршењем одговарајућих рачунских операција. Решавање једначина заснива се на познавању рачунских операција и њихове међусобне повезаности. При решавању једначина са непознатим елементом множења и дељења, треба узимати само примере с целобројним решењима. Код решавања неједначина у разредној настави, треба користити начин „погађања“ на погодно одабарним примерима. Исто тако уз дату неједначину, треба посматрати и одговарајућу једначину која се добија када се неједначини знак неједнакости замени знаком једнакости. Ако одредимо решење једначине, онда је лако одредити скуп решења дате неједначине“ (Правилник, 2005: 40).

Када је у питању наш програм с правом ћемо констатовати да је алгебра заступљена још од раног школског узраста, те не би требале да се појаве потешкоће код ученика, при овладавању алгебарским садржајима. За нас је посебно важно решавање једначина и неједначина, па ћемо на њих ставити посебан акценат у даљем тексту.

3.3.1. Увођење појма променљиве

Почетак формирања математичког језика заснован је на симболима, изразима и формулама. Први математичар који је бројеве заменио симболима био је Вијет (Francois Viète), управо са њим упознајемо се са једним новим подручјем математике које представља словну алгебру. Развијајући своје идеје Вијет је своја закључивања сврстао у теоријски оквир под називом *logistica speciosa*, указујући на то да су његове идеје у вези са специјама, односно класама бројева, те да своју пажњу не усмерава на појединачне бројеве. Убрзо је назив *специја* замењен термином *променљива величина* или у неком краћем облику само *променљива*. Симбол те променљиве могло је бити било које слово. Даље, у 20. веку Пикок (George Peacock) направио је јасну разлику између аритметичке алгебре и словне алгебре. Аритметичка алгебра подразумевала је релације између конкретних бројева, које је Пикок касније замењивао словима. Тако се променљива више није схватала као број, већ као самостални објекат (према: Зељић, 2014). Пошто су се идеје Сфарда (Sfard, 1995) темељиле на идејама Вијета, он такође заступа став да увек треба мислити о целокупној класи (скупу) бројева, а не само о једном одређеном броју.

Већ у другом разреду основне школе врши се припрема за увођење појма променљиве, где се променљива појављује у процесу обнавља рачунских операција сабирања и одузимања. Пошто се у другом разреду ученици упознају са латиничним словима јасно је да ће приступ појму променљиве бити олакшан јер је одсликавају различита слова, углавном абетеде. Претходно је било речи да се у трећем разреду основне школе поступно уводи појам променљиве, где слово заузима симбол променљиве. „Код ученика се поступно изграђује представа о променљивој, при чему слово наступа у својству симбола променљиве. Ученици најпре одређују вредности најпростијих израза (облика: $a+3$, $b-4$, $a+b$, $a-b$) за различите бројевне вредности слова која у њима фигуришу. Касније постепено упознају сложеније изразе“ (Правилник, 2005: 40). Важно је напоменути да полазак од реалних ситуација олакшава ученику овладавање појмом променљиве. На пример, бавећи се читањем података о висини чланова породице ученици спонтано усвајају појам променљиве и долазе до потребе увођења обједињујућег (апстрактног) математичког појма (Ђокић, 2014).

Усискин (Usiskin, 1997) наглашава да је алгебра језик, а да бисмо разумели тај језик, морамо пре свега разумети концепт променљиве¹⁴. Алгебра као језик подразумева читање, писање и манипулисање бројевним и словним изразима у формулама, једначинама и неједначинама. Да би се у потпуности разумео појам променљиве мора се водити рачуна о правилима алгебарског језика. На пример израз $3x$, значи 3 помножено са x , међутим и израз $x3$ значи x помножено са 3, што је заправо исто као и претходни израз, али углавном се пише $3x$ јер постоји конвенција о томе да се коефицијент, у нашем случају 3, увек пише на првом месту.

„Математички језик чине основни симболи, изрази и формуле. То је језик тачан, јасан и истовремено прецизан. Код ученика се поступно изграђује представа о променљивој, при чему слово наступа у својству симбола променљиве. Ученици најпре одређују вредности најпростијих изрази за различите бројевне вредности слова која у њима фигуришу. Касније постепено упознају сложеније изразе“ (Наставни програм за четврти разред, 2015: 101).

Многи аутори се слажу са чињеницом да се ученици у основној школи више сусрећу са словом као непознатом, него као са променљивом. Стога се Карпентер и Леви (Carpenter and Levi, 2000) залажу за чешћи сусрет ученика са словом као променљивом, јер сматрају да то може помоћи у превазилажењу бројних недоумица у оквирима ране алгебре.

Кухман је у свом истраживању чији је узорак чинило 3000 британских средњошколаца узраста од 13 до 15 година испитивао како они схватају слова и словне изразе. Резултати истраживања су показали да је мали број ученика слово схватило као променљиву, док је већина ученика слово схватила као непознату. Чак је већи број ученика слово пре схватила као уопштен број, него као променљиву. С тим у вези јасно је зашто Карпентер и Леви захтевају чешће додире са појмом променљиве на раном школског узрасту и залажу се за рану алгебру. Права значења алгебарске нотације могу се открити једино уз помоћ ране алгебре. Истраживања су показала да ученици највише потешкоћа имају да схвате да слово x (или било које друго слово) може означавати било који број. Основа проблема огледа се у томе што су ученици у оквиру аритметике навикли да се баве конкретним случајевима, док алгебру одликују општи случајеви (Carragher, et al., 2007).

Ученици у почетној настави математике имају различите представе о разумевању слова, тако Колис (Collis) истиче шест различитих категорија у оквиру којих се слово може употребити (према: Kuchemann, 1978):

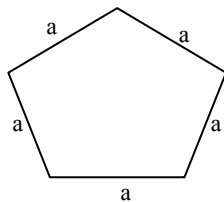
1. слово које се може израчунати;
2. слово које се игнорише;
3. слово као објекат;
4. слово као специфична непозната;
5. слово као генерализовани број;
6. слово као променљива.

У првом случају Колис говори о слову које се може израчунати, дакле то важи у следећој ситуацији: $a + 2 = 6$; $a = ?$. Као што се види овде се слово „ a “ може одмах израчунати, односно, не постоје комплексни кораци за израчунавање непознатог слова.

¹⁴ Усискин (Usiskin, 1988) променљиву посматра као словну репрезентацију броја која може имати две или више вредности у оквиру једног процеса.

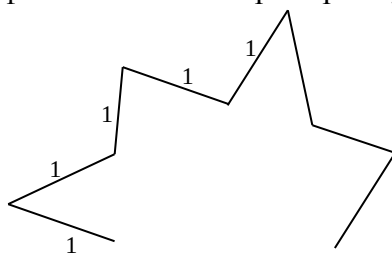
Други случај својствен је слову које се игнорише, дакле уколико имамо $a + b = 25$; $a + b + 2 = ?$ види се да се друга једнакост разликује од прве, тако што се на прву једнакост додаје 2, с тим у вези $a + b$ може бити игнорисано.

Слово као објекат обично се употребљава у случају обележавања страница неког многоугла (слика 16).



Слика 16. Правилан шестоугао странице „а“

Затим, слово као специфична непозната примерено је следећој слици:



Слика 17. Део фигуре (отворена изломљена линија)

Део фигуре са дате слике није нацртан, што значи да постоји n страница и све странице имају исту дужину односно 1. Дакле, n је непознат број који не може бити израчунат.

Потом се сусрећемо са словом које приказује генерализовани број. Рецимо, у следећем примеру $a + b = 12$; $a < b$; $a = ?$. У овом случају a морамо посматрати као скуп бројева, дакле, није реч о једном броју већ о више различитих бројева који могу бити решење постављеног проблема. Најзад долазимо до слова које се схвата као променљива, Колис је то приказао кроз следећи пример: Шта је веће $2k$ или $2k + 2$? Потребно је уочити везу између $2k$ и $2k + 2$, те закључити да ако се за k узме било која вредност да ће $2k + 2$ увек бити веће за 2 од $2k$ (Kuchemann, 1978). То се може показати и закључивањем од појединачног ка општем (индукцијом), дакле, на основу неколико примера где у сваком k има другу вредност долазимо до општег закључка да је $2k + 2$ увек веће за 2 од $2k$.

Погрешна интерпретација променљиве од стране ученика проблем је који се не сме занемарити јер је резултирао у многим истраживањима. Кучеман (Kuchemann, 1978) је својим истраживањем потврдио да ученици најчешће занемарују променљиву. Рецимо, када се од њих захтевало да 4 додају на $n + 5$, око 68% ученика је дало тачан одговор, односно да је $4 + n + 5 = n + 9$, док је 20% ученика дало нетачан одговор, тј. да је тај израз једнак 9, док преостали ученици нису дали одговор.

Вотсон (Watson, 1990) бавећи се проблемом дечјег доживљавања слова као променљиве, истиче да ученици иако прихвате чињеницу да слова могу заменити бројеве, склони су тенденцији да та слова повезују са њиховим позицијама у абеди, што наравно није смислено овом контексту.

Такође, ученици врло тешко прихватају ситуацију да вишеструко појављивање истог слова у ствари представља исти број (Kieran, 1988). Ученици радије слова посматрају као „специфичне непознате“ у случају $3 + x = 5$, него што ће слово посматрати као неки „уопштени-генерализован број“ у смислу $x + y = y + x$. Неправилно коришћење слова у аритметици и алгебри, такође доводи до збуњивања ученика у почетној настави математике, јер у аритметици рецимо слово „m“ је ознака за метар или слово „l“ је ознака за литар, док би у алгебри та слова могла да означавају број метара или број литара, с тим у вези ученици врло често у изразу $5a + b$, слова а и b доживљавају као нешто што почиње на слово „a“, односно нешто што почиње на слово „b“, те не успевају да та слова схвате као променљиву (Booth, 1986).

Марјановић и Зељић (2006) у почетној настави алгебре идентификују четири случаја коришћења слова, то су:

1. „састављање и решавање једноставних облика једначина;
2. састављање и решавање једноставних облика неједначина;
3. симболичко изражавање правила аритметике;
4. састављање словних израза и једнакости које изражавају правило кореспонденције између два квантитета (изражавање функционалне зависности између променљивих)“ (стр. 13).
- 5.

Марјановић (1996) посебно наглашава да је врло важно при увођењу појма променљиве, направити јасну разлику између променљиве и држача места.

Почетна настава математике обилује задацима следећег типа: $8 + \underline{\quad} = 12$; $6 \cdot \square = 30$; $\underline{\quad} - 9 = 19$; $\square : 9 = 6$. Овакви задаци схватају се као најједноставније једначине које у реторичком смислу гласе: „Који број треба додати броју 8 (или треба сабрати са бројем 8) да би се добио број 12?“ итд. Бавећи се оваквим задацима представљени квадрати или црте имају заједнички назив „држачи места“, где посебну пажњу треба обратити на то да држачи места нису ререзентација неког броја, већ само указују на место где одређени број треба уписати. При избору слова за број који нам је непознат у датим примерима према старој традицији најчешће се користи „x“. Ученицима треба нагласити да „не постоји никакав непознати број у апсолутном смислу, већ тако зовемо било који број када се нађе у неком прикривеном стању“ (стр. 70).

Пинтер и сар. (1996) говорећи о увођењу променљиве и словних израза уопште код ученика млађих разреда налажу да је врло ефикасно користити различита вежбања која су спој индиктивног и дедуктивног закључивања. Дакле, одређеним вежбама усмеравати ученике на прелаз од бројевних израза ка словним и обрнуто.

Бризuela и сар. (Brizuela et al., 2015) након спроведеног истраживања са ученицима првог разреда основне школе из САД-а дошли су до закључка да ученици на овом узрасту могу да разумеју темељни концепт појма променљиве и њене ознаке. Такође заступници су става да појам променљиве и њене нотације треба постепено уводити код ученика од најарнијег школског узраста како ученици не би дошли у ситуацију да нотације променљиве схвате као ознаке које нису ни у каквој вези са истом.

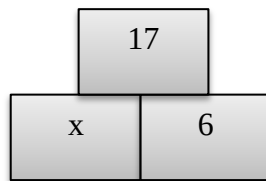
3.3.2. Једначине у почетној настави математике

Посматрајући алгебру као ефикасно средство у решавању математичких проблема Кијеран (Kieran, 1997) истиче неопходност конструкције знања у вези са једначинама. У конкретнијем смислу, према њеном мишљењу једначине треба схватити као структуру која повезује два алгебарска израза, те да треба развити свест о томе да структуру једначине може чинити и више од два алгебарска израза, а да притом представљају исту ситуацију. Она такође посебан акценат ставља и на важност доброг познавања својстава једнакости у смислу: (а) рефлексивности (исто је исто); (б) симетричности (једнакост леве и десне стране); (в) транзитивности ($a=b$, $b=c$ важи да је $a=c$). Кијеран (Kieran, 1996) тврди да су два основна елемента алгебре једначине и математички изрази.

Једначине које су од посебне вежности су оне које су одраз одређених проблемских ситуација (Bell, 1995). Наш програм предвиђа постепено упознавање са једначинама кренувши још од првог разреда основне школе. Марјановић (1996) једначине посматра као помоћно средство ученицима, које им омогућава манипулацију словима и словним изразима у смислу развијања идеје о променљивој. Такође наглашава да је од битног значаја веза између сабирања и одузимања, којом ученици треба да овладају како би решавали једначине типа $a + b = c$, $c - b = a$. Увежбаност везе између сабирања и одузимања повезан је са поступком решавања једначина. Једначину облика $x + 3 = 5$ ученици решавају тражећи број који је потребно сабрати са 3 да би се добио број 5. У наредној фази ученици приступају растављању збира на два сабирка од којих је јадан унапред познат, односно једначина $x + 3 = 5$ трансформише се у једначину облика $x + 3 = 2 + 3$ (Дејић и Егерић, 2003).

Кнут са сарадницима такође истиче важност овладавања аритметичким операцијама у смислу разумевања веза и односа који владају међу њима, јер је то сигуран пут који може помоћи при решавању једначина (Knuth et al., 2006).

Појам непознатог броја и једнакости у којима „фигурише непознати број“ уводи се још у првом разреду основне школе. Већ смо говорили о томе да је важно да ученици схвате да сваки непознати број може бити било који број који је прикривен одређеним условом. Различите дидактичке игре могу кореспондирати са том „прикривености“ која ће нестати након откривања броја који се „крио“ иза непознатог броја x . Тада је могуће писати једнакости $x = 2$, $x = 4$ и сл (Зељић, 2011: 49). Зељић (2014) јасно истиче да многобројне ситуације из непосредног окружења ученика (очишћене од шума и иконички представљене) могу наводити и подстицати ученике да пишу словне изразе и једнакости. На пример, на основу следеће иконичке представе (слика 18) ученици могу записати једнакост која јој одговара, дакле: $x + 6 = 17$.



Слика 18. Иконичка представа једначине облика $x + 6 = 17$

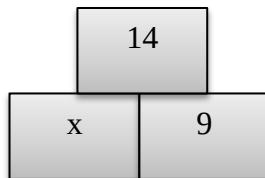
Прича која може да прати а уједно и да употпуни ову слику гласила би „на једној грани је неколико птица (x), а на другој 6, а укупно их је $x + 6$, тј. 17“. Односно: „На грани је било неколико птица, долетело је још 6 птица и сада их је на грани укупно 17. Колико је птица било на грани?“.

Правилник о програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања (2018) прописује да „решавање једначина помаже у утврђивању веза аритметичких операција и уочавања могућности да се различите проблемске ситуације могу представити истом математичком реченицом, што представља развој концепта математичког моделовања“ (стр. 74).

Правилник о програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања (2019а) истиче да се у трећем разреду решавају једначине облика „ $a + x = b$, $a - x = b$, $x - a = b$, $a \cdot x = b$ на основу веза операција сабирања и одузимања и множења и дељења. Подстиче се навика провере решења и анализа „логичности“ решења с обзиром на контекст проблема“ (стр.35).

Правилник о програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања (2019б) истиче да на том узрасту ученици могу да решавају просте и сложене једначине облика „ $a \cdot x \pm b = c$, $a - b \cdot x = c$, $x : a \pm b = c$, $a - x : b = c$, $a : x \pm b = c$, $a - b : x = c$, $a \cdot (x \pm b) = c$, $a \cdot (b - x) = c$, $(x \pm b) : a = c$, $(a - x) : b = c$, $a : (x \pm b) = c$, $a : (b - x) = c$ “ (стр. 40).

Главни ослонац ученицима при одређивању непознатог броја представља добро овладавање операцијама сабирања и одузимања. Што би значило да ученик треба добро да познаје компоненте одређене једначине и да увиђа односе између тих компонената. На пример, једначине облика $x + 9 = 14$ или $14 - x = 9$, је могуће решити истим поступком $x = 14 - 9$, а засниване су на истом идеографу:



Слика 19. Иконички облик једначине

Први случај базиран је на цртању слике која одговара „сабирању“, док у другом случају иста слика одговара рачунској операцији „одузимање“. Први случај речима се може представити као „имаш x , додао си 9 и сада имаш 14“, док у другом случају то може гласити „имаш 14, одузео си x и остало ти је 9“. Кроз неколико адекватних примера везе са рачунским операцијама ће се увежбати, међутим та способност не сме се „формирати на запамћивању, већ на значењу“ (Марјановић, 1996: 73).

Провера решења је такође битан завршни корак при решавању једначина. Дешава се да ученици добију решење једначине које је погрешно, те га такво и оставе због неразвијене способности да адекватно изврше његову проверу. Провера решења након решавања једначина је једна од кључних компоненти у ученичком раду у алгебри. Ученици треба да се оспособе да постављају себи питања у вези са једначинама које решавају, јер када могу саставити смислене реченице и представити их у реалном контексту велика је вероватноћа да ће доћи до закључка да ли је решење које су добили исправно или није.

Можда када би се увела пракса провере сваког добијеног решења и пре сусрета са алгебарским облицима, тада ова способност не би изостала код ученика и ученици би били уверљивији у своја знања, а активност провере би се и сама наметнула у алгебарским проблемима (Wollman, 1983). Дејић и Егерић (2003) слично Марјановићу (1996) истичу да поступак решавања најједноставнијих примера једначина у вези са сабирањем и одузимањем треба да се сведе на извођење тих рачунских операција. На пример, при решавању једначине облика $x + 12 = 20$, бира се број који сабран са 12 даје 20, а то је број 8, дакле записује се $x = 8$, па се врши провера $8 + 12 = 20$. Овим путем ученици примењују своја знања која су стекла у вези са рачунским операцијама сабирањем и одузимањем. При решавању једначина важно је стварати проблемске ситуације које су у вези са свакодневним животом ученика, односно које су одраз реалних животних ситуација и активности.

Пример 39. На полици је одређен број књига, када је Мила додала још 19 нових књига укупно је било 67 књига. Колико је било књига на полици пре него што је Мила додала нове?

Може се поставити једначина:

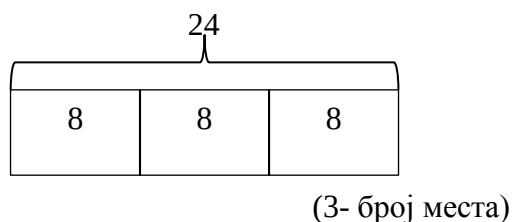
$$x + 19 = 67$$

Руководећи се везом између сабирања и одузимања и разумевањем компоненти од којих је једначина састављена закључује се да је у овој једначини непознат први сабирак, који се израчунава на следећи начин:

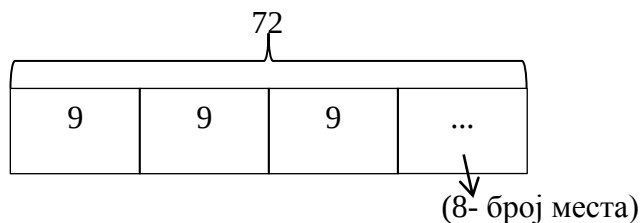
$$\begin{aligned} x &= 67 - 19 \\ x &= 48 \end{aligned}$$

Дакле, на полици је било 48 књига, што се проверава сабирањем: $48 + 19 = 67$.

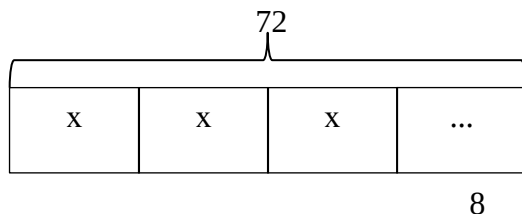
Једначине облика $a \cdot x = b$ и $b : x = a$, решавају се помоћу увиђања веза и односа између рачунских операција множења и дељења. Ученике би требало навикавати да број 24 виде као производ бројева 3 и 8. Односно треба их упутити да разумеју идеограф који изгледа овако:



Или, на пример 72 може се представити као $8 \cdot 9$ што би у иконичком смислу изгледало:

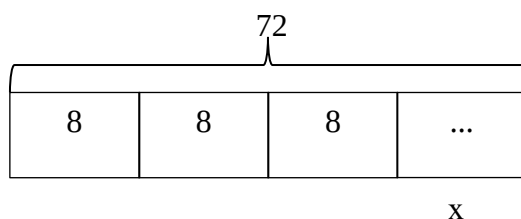


На овај начин ученици се наикавају да претходну слику читају „на 8 места по 9“. Након неколико аналогних примера приступа се једначинама. Дакле, једначина облика $8 \cdot x = 72$ може се представити,



према осећају за дељење биће: $x = 72 : 8$.

Уз једначину $72 : x = 8$ може се нацртати,



што ће према осећају за дељење бити: $x = 72 : 8$.

Колико је иконичка представа једначина значајна потврђује нам и Хигисон (Higginson, 1982) који сликовито објашњава Русов (Jean-Jacques Rousseau 1712–1778) приступ алгебри и њеним садржајима. Русов став је био да формула којом се решава квадрат бинома¹⁵ није била валидна све док ту формулу није потврдио цртањем одређене фигуре на папиру. Русо је својевремено рекао: „Није да сам имао мржњу према алгебри, као према апстрактној ствари, већ сам желео операцију да видим графички представљену, другачије то нисам никако могао да разумем“ (стр. 240).

Неопходно је споменути да ученици млађих разреда могу решавати и сложеније облике једначина, за које им је потребно функционално знање аритметичких операција и овладавање аритметичким изразима у скупу природних бројева. На пример, ако ученици израз $12 \cdot 3 - 20$ схватају као разлику бројева (производа $12 \cdot 3$ и броја 20), неће имати потешкоће да у једначини $12 \cdot x - 20 = 28$, уоче израз у коме се налази x и третирају га као непознати умањеник.

Пример 40. Миша је купио неколико фломастера по цени од 10 динара и једну хемијску за 55 динара. Укупан рачун износио је 85 динара. Колико је фломастера купио Миша?

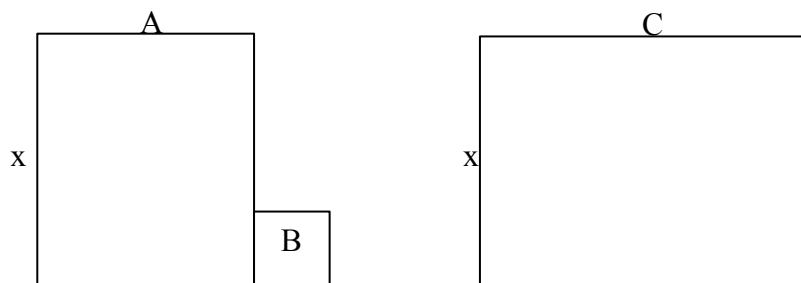
Према наведеним условима поставља се једначина:

$$\begin{aligned} 10 \cdot x + 55 &= 85 \\ 10 \cdot x &= 85 - 55 \text{ (непознат сабирок)} \\ 10 \cdot x &= 30 \text{ (непознат други чинилац)} \\ x &= 30 : 10 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

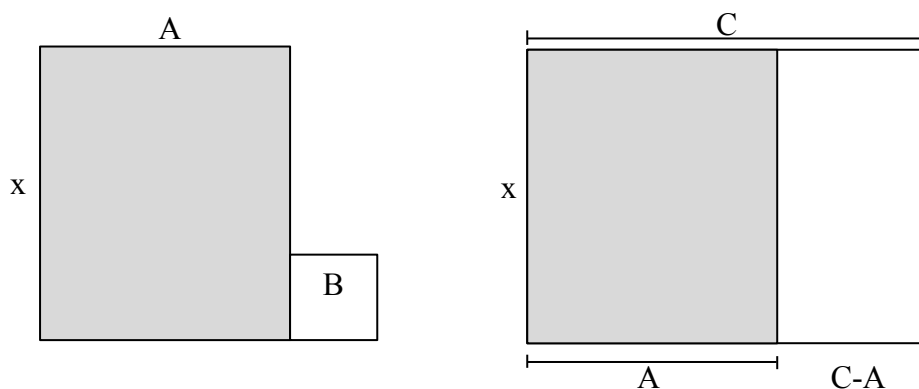
¹⁵ Квадрат бинома: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Дакле, Миша је купио 3 фломастера.

Филоу и Рохано (Filloy & Rojano, 1985: 21) захтевали су од ученика да осмисле начине на који ће представити једначине облика $Ax \pm B = Cx$ и $Ax \pm B = Cx + D$. Ради ефикаснијег разумевања оваквих једначина ученицима је наглашено да су A и C позитивни цели бројеви и да је $C > A$. Основна идеја коју су ученици користили заснива се на представљању једначине кроз геометријски контекст. Први корак био је стварање модела једначине (слика 20). Други корак односио се на упоређивање области које се налазе на моделу (слика 21). Трећи корак односио се на стварање нове једначине $(C - A)x = B$. Четврти корак претпостављао је решавање нове једначине и пети корак подразумевао је проверу решења.



Слика 20. Модел који представља једначину $Ax \pm B = Cx$



Слика 21. Корак ка трансформацији у нову једначину

Према Кијеран (Kieran, 1992) методе решавања једначина су следеће:

- „употреба нумеричких чињеница,
- употреба техника бројања,
- сакривање,
- распакивање (рад уназад),
- проба-грешка замена,
- транспозиција („мења страну-мења знак“)
- извођење исте операције са обе стране једнакости “ (стр. 400).

Кијеран сматра да последња два приступа спадају у формалне методе решавања једначина и да су примеренији ученицима виших (шести и седми) разреда.

Док су бројна истраживања која је спровела показала да је метод „проба – грешка замена“ најприсутнији код ученика млађих разреда приликом решавања једначина.

Садржаји у вези са једначинама и неједначинама о којима ћемо говорити у наредном одељку помажу ученицима да најпре схвате и разумеју ове појмове, потом да овладају поступцима одређивања непознате величине, те да се оспособе да различите математичке проблеме решавају уз помоћ моделовања једначина (Дејић и Егерић, 2003).

3.3.3. Неједначине у почетној настави математике

Већ смо споменули да наш програм прописује увођење појма неједначина у трећем разреду основне школе, даље ученици се оспособљавају да решавају неједначине и у четвртом разреду у скупу природних бројева. Зељић (2014) јасно указује на поступке које је претходно неопходно спровести пре приступа решавању неједначина:

- овладавање аритметичким изразима и познавање структуре истих, као и прихватање словних израза процедурално и структурално;
- разумевање и спровођење поступка при решавању једначина;
- увођење скуповно-теоријске нотације;
- упознавање са неједначинама облика $x > a$ и $x < a$;
- изграђивање разумевања функционалне зависности резултата операције од промене њених компонената.

Када говоримо о увођењу неједначина у настави Бланко (Blanco) и Гарот (Garrote) захтевају следеће:

- „појам не уводити сувише брзо;
- уверити се да је развијено значење симбола;
- јасно нагласити разлике између једначина и неједначина;
- користити различите језике (свакодневни и алгебарски) како би се појам разумео;
- увести формалне нотације који су у вези са процесима неопходим за решавање неједначина;
- користити различите стратегије решавања“ (Blanco and Garrote, 2007: 227).

Према методичкој основи Марјановића (1996) прилоком упознавања ученика са неједначинама потребно је кренути од најједноставнијих примера облика $x > a$ и $x < a$, те се фокусирати на бројеве који могу заменити „ x “ па потом одредити скуп бројева који се могу наћи уместо „ x “.

У почетној настави математике посебно је важно пажњу посветити једноставним неједначинама облика: $x + a > b$; $a + x < b$; $x - a > b$; $x - a < b$; $a - x < b$; $a - x > b$; $a \cdot x > b$; $a \cdot x < b$. Правилник о програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања (2019а) налаже да увек треба „бирати примере неједначина код којих је лако сагледати скуп решења (погађањем или коришћењем табела)“, али и „увести начин записивања решења уз коришћење симбола $\in$, $\{$ и $\}$ “ (стр.69). Правилник о програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања (2019б) указује на то да:

„Решавање једначина заснива се на познавању рачунских операција и њихове међусобне повезаности. Ученици се упућују да утврде вредности које би могла имати непозната у неједначини и у том скупу утврђује се за које вредности непознате се добија тачна неједнакост. Решавање неједначина заснива се на таблицама или на решавању одговарајућих једначина и познавања функционалне зависности резултата рачунских операција од њених компонената. Решења се записују уз коришћење симбола $\in$, $\{$ и $\}$. Разматрају се случајеви код којих неједначина има једно решење, има више решења или нема решења. Подстиче се навика провере решења и анализа „логичности“ решења с обзиром на природу проблема“ (стр. 40).

Дејић и Егерић (2003) истичу да се у припремном периоду увођење неједначина врши путем променљиве коју не замењује слово, већ одређени објекат (квадрат, круг, црта и сл.). На пример: $__ < 5$; $5 + 3 > __$; $7 + __ < 11$ итд. Задатак ученика је да одреди одговарајуће бројеве који се могу наћи на датој црти тако да задовоље постављени услов (неједнакост). Улога наставника је да ученике усмерава да изнађу што више бројева како би одредили скуп свих бројева који задовољавају дату неједнакост. Ако би се са x означио било који од бројева који погодује датој неједнакости онда се добија неједнакост са променљивом: $x < 5$; $5 + 3 > x$; $7 + x < 11$. „Неједнакост са променљивом назива се неједначина, а вредности променљиве, за које је неједнакост тачна, су решења те неједначине“ (стр. 214). Прилоком увођења неједначина најефектније је кренути од проблемске ситуације која има одлике реалног контекста.

Пример 41. На полици је 25 чаша, конобар је додао на полицу још неколико чаша и сада их је на полици мање од 30. Колико чаша је конобар могао да дода на полицу?

На основу датих података може се записати неједначина:

$$25 + x < 30$$

Решење неједначине може да се одреди на више начина.

1. Бирањем и проверавањем неких бројевних вредности за x ;

Конобар је на полицу могао ставити:

1 чашу, јер је $25 + 1 < 30$, или

2 чаше, јер је $25 + 2 < 30$, или

3 чаше, јер је $25 + 3 < 30$, или

4 чаше, јер је $25 + 4 < 30$.

Дакле, реше неједначије је $x = 1$, или $x = 2$, или $x = 3$, или $x = 4$, што се краће записује у виду скупа: $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Одговор: Конобар је могао на полицу да дода 1, 2, 3 или 4 чаше.

2. Неједначина се може решити и путем одређивања непознатог сабирка;

$$25 + x < 30$$

$$x < 30 - 25$$

$$x < 5 \quad \text{или} \quad x \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Одговор: Конобар је могао на полицу да дода 1, 2, 3 или 4 чаше.

3. Путем таблице;

	СКУП РЕШЕЊА						
x	1	2	3	4	5	6	7
25 + x	26	27	28	29	30	31	32
	ТАЧНА РЕШЕЊА				НЕТАЧНА РЕШЕЊА		

Одговор: Конобар је могао на полицу да дода 1, 2, 3 или 4 чаше.

Да би ученици успешно савладали неједначине потребно је користити различите репрезентације при њиховој обради као што су: графички модели, табеле, текстуални проблеми, симболи и сл. (Verikios and Farmaki, 2008). „Коришћење вербалних, нумерички, графичких и алгебарских репрезентација има потенцијал да процес учења алгебре учини смисленим и ефикасним“ (Friedlander & Tabach, 2001: 173). Иако свака репрезентација поседује одређене недостатке, њихова комбинована употреба може се показати изузетно ефикасном у приступу код неједначина (Karut, 1992).

Решавање неједначина у почетној настави математике ослања се на решавање једначина уз функционалну примену правила зависности резултата операције од промене њених компонената. На пример, неједначину облика $20 + x > 44$, решићемо тако што ћемо прво решити једначину $20 + x = 44$ ($x = 24$), а потом вршимо анализу израза $20 + x$. Када x узима вредност 24, вредност израза $20 + x$ једнака је броју 44. Вредност израза $20 + x$ расте када x расте, па је решење неједначине $x > 24$. Врло је важно водити рачуна при решавању неједначина са променљивим умањеником и умањоцем у скупу природних бројева, због изводљивости операције одузимања у том скупу.

Прво је важно одредити скуп D у коме се траже решења, јер сва остала решења изван скупа била би бесмислена. На пример, при решавању неједначине $56 - x < 40$, прво одређујемо скуп D у оквиру кога можемо тражити решења ($D = \{56, 55, 54, 53, 52, 51, \dots, 0\}$). Након тога решавамо једначину $56 - x = 40$ ($x = 16$). Анализирамо израз $56 - x$: вредност израза расте ако се умањилац смањује, односно вредност израза опада ако се умањилац повећава. Дакле вредност израза, $56 - x$ биће мања од 40 ако умањилац x има вредности веће од 16. Па је решења скуп $D = \{17, 18, 19, 20, \dots, 56\}$. Бројне су недоумице приликом решавања неједначина од стране ученика, а проблеми који до њих доводе су: погрешно посматрање и разумевање везе између једначина и неједначина, схватање ученика да неједначина има само једно решење, манипулација алгебарским симболима без развијеног значења истих и конфузија при решавању сложенијих неједначина (Ursini & Trigueros, према: Зељић, 2014).

Да би се наведени проблеми избегли, неопходно је поступити према претходно наведеним поступцима при увођењу појма неједначина. Овладавање поступком и начинима решавања неједначина свакако је важно као и овладавање једначинама у почетној настави математике. Међутим, такав став се не може у потпуности прихватити од стране појединих аутора. Боеро и Бацини (Boero & Bazzini, 2004) објашњавају да се у већини земаља (укључујући и Грчку) неједначине изучавају као споредан наставни садржај у односу на једначине.

Прецизније речено, ученици неједначине решавају на основу унапред утврђеног алгоритма, који је оличење тривијалног процеса решавања и резултира низом рутинских процедура које нису ни мало лаке ученицима да их разумеју. С тим у вези ученици нису у стању да решавају неједначине које нису релевантне наученим шемама.

Кијеран (Kieran, 2004) јасно ставља акценат на то да је прави изазов пронаћи адекватне методе и поступке уз помоћ којих се може помоћи ученицима да се чувају замке које доминирају у вези између једначина и неједначина. Бланко и Гарот (Blanco & Garrote, 2007) посебно истичу да ученицима највећи проблем представља неразумевanje значења алгебарских симбола који су својствени неједначинама. Према њиховим налазима ученици неједначине решавају по неким унапред утврђеном принципу решавања, те не успевају да објасне због чега су одређене кораке урадили.

3.3.4. Концепт функционалне зависности

Врло често алгебра се посматра као студија која подразумева функцију, релације и променљиву, те се бави проучавањем њихових међусобних веза и односа (O'Callaghan, 1998). Кијеран (Kieran, 1997) такође у основи алгебре види идеју функције и истиче њену велику улогу и значај у процесу математичког моделовања. Идеја функције има вишедимензионални карактер који табеле и графике стапа у ентитет и део је процеса који подразумева генерализацију (Karut, 1999). Представљање функционалних односа у настави математике постиже се на три начина: геометријски (шеме, дијаграми, графици, цртежи); аритметички (бројеви, табеле, уређени парови); алгебарски (словни симболи, формуле, придруживање) (Verstappen, према Kieran: 1992). За нас је најзначајнији алгебарски начин, јер се у раду бавимо алгебарским садржајима, тачније једначинама и неједначинама. Блантон са сарадницима (Blanton et al., 2011) истиче да је развијање идеје функције везано за „генерализовање односа између поменљивих величина, изражавање тих односа речима, симболима, табелама или графиконима и разумевање различитих репрезентација због анализе функције“ (стр. 13). Како би исход разумевања идеје функције био позитиван, према мишљењу Хеида (Heid, 1996) ученике је претходно добро навићи на начин алгебарског размишљања јер, функционани приступ алгебарском размишљању подразумева „алгебру која се базира на развоју искустава са функцијама и породицама функција кроз сусрете са ситуацијама из свакодневног живота чији се квантитативни односи могу описати тим моделима“ (стр.239).

Национални савет наставника математике (NCTM)¹⁶ са америчког подручја истиче да се „функционални односи могу изразити симболичком нотацијом, која омогућава језгровито изражавање сложених математичких идеја“ (према: Kieran, 2004: 143-144). Истраживања која су до сада спроведана у области функције углавном су била фокусирана на ученике старијих разреда основне школе или пак на ученике средњих школа. Насупрот томе постоје и аутори који сматрају да функционалну зависност могу разумети и ученици на млађем школском узрасту уколико се садржи у вези са идејом функције прилагоде њиховим могућностима и способностима (Moss & London McNab, 2011).

¹⁶ Национални савет наставника математике (NCTM, 2000) указује на активности кроз које ученици од трећег до петог разреда основне школе треба да приступају алгебарским садржајима: (1) представљање формула речима, симболима или табелама; (2) увиђање, разумевање и примена односа између одређених величина; (3) извођење генерализација; (4) описивање образаца посредством графика; (5) коришћење алгебарских нотација у приказивању формула, генерализација и ситуација.

Функција је уређена тројка објеката (X, Y, f) где је X домен, Y кодомен, а f закон придруживања. У почетној настави математике не користе се појмови домен и кодомен већ се они спонтано усвајају. Дакле функцију записујемо на следећи начин $y = f(x)$.

„Идеја функције прожима све програмске садржаје, почевши од формирања појма броја и операције. Највећи значај на овом плану придаје се откривању идеје пресликавања. (...) Изграђивању појма пресликавања помаже увођење таблица и дијаграма. (...) Таблични начин изражавања пресликавања користи се за утврђивање промене резултата операција, у зависности од промене једне од компонената, као и за установљивање пропорционалности промена појединих елемената операције. (...) Откривању идеје функције доприносе и разноврсна вежбања с бројевним низовима. На пример, може се дати задатак: Продужити низ 10, 15, 20... Који ће број бити у низу на осмом (петнаестом) месту? Да ли је у датом низу број 45 (или 44)? На којем ће месту у датом низу бити број 55 (или 70)?” (Правилник, 2005: 40).

Функционално размишање је од битног значаја у тумачењу веза и односа између две величине које имају свосјство да се могу приказати путем различитих репрезентација као што су: табеле, формуле, дијаграми и други геометријски модели. Функцију треба схватити као релацију, коју карактерише својство да за сваки елемент из домена (полазни скуп) на основу датог пресликавања, имамо тачно један елемент кодомена (пресликавањем добијени скуп). Појам функције треба уводити од почетка школовања, а као помоћна средства користити: попуњавање таблица где у зависности од промене компоненте зависи и промена резултата, могу се дати бројеви из домена и кодомена, а од ученика захтевати да успоставе везу између њих и то запишу симболички (Дејић и Егерић, 2003). Усискин (Usiskin, 1988) истиче да идеја функције остварује позитивне ефекте на разумевање алгебре у смислу увиђања односа између величина где одређени симболи имају статус променљиве величине.

Један од задатака почетне наставе математике јесте „да ученици усвоје основне чињенице о скуповима, релацијама и пресликавањима“ (Правилник, 2005: 39). Зељић (2014) сматра да би идеју функције требало развијати вођењем ученика до симболичког (словног) изражавања функционалне зависности између променљивих, а не путем дефиниција. На основу реалне ситуације може се сачинити табела помоћу које ће ученици процедурално схватити функционалну зависност.

Пример 42. На једној полици има x књига, а на другој y књига. Када на другу полицу додамо две књиге, на обе полице биће једнак број књига. Сликама се дата ситуација представља на следећи начин:

y	
x	■ ■

Јасно се види да је $y = x + \boxed{2}$.

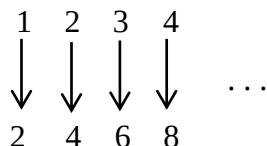
Ова једнакост биће тачна ако је $x = 0$ и $y = 2$. Одговарајућа табела може изгледати на следећи начин:

x	1	2	3	6	10
y	3	4	5	8	12

Марјановић (1996) истиче да се ученици врло често срећу са задацима у којима је дат одређени низ бројева у којима је потребно утврдити правило његовог формирања па га наставити. Решавање проблема које је својствено идији функције подразумева да ученик има развијене способности сагласне наредним нивоима: (1) моноструктурни ниво (коришћење датих података и употреба једне операције с циљем решавања проблема); (2) вишеструктурни ниво (коришћење датих података и употреба више операција с циљем решавања проблема); (3) релацијски (способност генерализовања односа између променљивих, формирање алегбарског израза и способност примене истог); (4) проширење апстракције (способност утврђивања и испитивања функционалних веза између датаих података и изналагање различитих стратегија за решавање проблема) (Lian & Idris, 2006).

Пример 43. Ако је у питању низ: 2, 4, 6, 8, ... врло брзо ученици могу уочити да се сваки следећи број добија увећањем претходног за 2. Међутим, на основу тог запажања није лако рећи који би број у том низу био на 100. месту.

Илустративно овај низ се може представити:



Ученике је важно оспособити да овакву илустрацију низа читају: 2 је на 1., 4 је на 2., 6 је на 3., 4 је на 8. месту и сл. (то потврђују стрелице које су повучене између бројева). Задатак ученика је сада да одреде израз који ће се наћи на n – том месту у датом низу.

$$\begin{array}{c}
 n \\
 \downarrow \\
 2 \cdot n
 \end{array}$$

Дакле, на 100. месту биће број $2 \cdot 100$ тј. број 200.

4. Преглед досадашњих истраживања

Значај проблемске наставе у почетној настави математике како је већ истакнуто, препознат је још у прошлом веку. Данас се налази у основи многих дискурса и истраживања с циљем да се што више примењује. Приликом проучавања релевантне литературе наишли смо на истраживања која углавном истичу улогу и значај проблемске наставе и истраживања која расветљавају проблеме са којима се ученици сусрећу приликом решавања једначина и неједначина, али кроз појединачни контекст.

Не постоје истраживања која говоре о улози проблемске наставе у развоју способности моделовања при решавању једначина и неједначина. Тако да с правом можемо рећи да је тема овог рада актуелна и оправдано исказује потребу да се дубље истражи.

Имплементација проблемске наставе пружа ученицима могућност да уоче везу између проблема из реалног живота и света математике. Ову констатацију нам потврђује истраживање које су спровели Портал и Сампсон (Portal & Sampson, 2001) где јасно указују на незадовољство ученика средње школе при извођењу наставе традиционалним приступом. С тим у вези извели су закључак да би наставу требало модификовати, а решавање математичких проблема повезивати са проблемима из реалног живота, те извршити реструктуирање са становишта спровођења наставних стратегија. Резултати овог истраживања су заиста оправдани, јер ако бисмо РМО приступ упоредили са традиционалним увидели бисмо бројне разлике.

Традиционални приступ захтева од ученика да своје стечено знање примењују на контекстуалне проблеме, док РМО приступ математичке проблеме ставља у контекст већ од самог почетка, конкретније објашњено, контекстуални проблеми и реалне животне ситуације блиске ученицима у РМО представљају полазну основу учења (Heuvel-Panhuizen, 2001). С тога је јасно зашто су ученици испољили незадовољство према традиционалном приступу.

Сличне резултате добили су и Падмавтеј и Мареш (Padmavathy & Mareesh, 2013) у свом експерименталном истраживању са ученицима средње школе у коме су испитивали ефекате проблемске наставе у настави математике. У том истраживању учествовало је 30 ученика експерименталне и 30 ученика контролне групе. Резултати су показали да су ученици експерименталне групе у којој је спроведена проблемска настава остварили знатно већи ниво постигнућа на тестовима знања у односу на ученике контролне групе који су радили трдиционалним приступом. Истраживање је потврдило претпоставку да спровођење проблемске наставе на часу математике делује подстицајно на ученике средње школе у контексту бољег разумевања и решавања проблема у реалном животу.

Истраживање које је такође потврдило високу ефикасност примене проблемске наставе у решавању математичких проблема спроведено је и са ученицима средње школе у Индонезији. Ученици експерименталне групе са којима се радило по моделу проблемске наставе показали су на тестовима знања из математике знатно развијенију способност за решавање проблема, насупрот ученицима контролне групе који су радили по конвенционалном (устаљеном) моделу (Amalia, Surya & Syahputra, 2017).

Као што видимо наведена истраживања која су спроведена са ученицима средњошколског узраста у потпуности оправдавају ефикасност имплементације проблемске наставе на часовима математике.

С обзиром да је скоро свако истраживање одликовао експеримент са паралелним групама (експерименталном и контролном) проблемска настава је у сваком смислу утицала на остваривање знатно виших постигнућа на тестовима знања од стране ученика у односу на традиционални приступ.

С друге стране осим испитивања ефикасности проблемске наставе у настави математике, важно је упознати се и са истраживањем које објашњава најчешће грешке које ученици праве при сусрету са проблемском ситуацијом. Једно од истраживања показује да ученици средњошколског узраста из Индонезије (15 година) нису у могућности да увек разумеју постављену проблемску ситуацију и дођу до решења проблема јер врло често праве грешке при: читњу постављеног проблема, разумевању проблема, трансформисању проблема и самом процесу решавања проблема. Истраживање је спроведено са 147 ученика и резултати су показали да 4,35% ученика грешку направи приликом читања, што је уједно и грешка која се најређе догађа, док 34,78% ученика направи грешку приликом трансформације и декомпозиције проблема, што је грешка која је најчесталија (Rohmah & Sutiarso, 2018). Грешке које ученици најчешће праве углавном се темеље на погрешном приступу постављеном проблему, који потиче из ситуације у којој ученици сваки математички проблем доживљавају као скуп наредби које је потребно извршити путем унапред одређених правила и процедура (Lapointe, Mead & Askew, 1992). Чак је и једно истраживање потврдило да се ученици углавном труде да математичке садржаје своде на запамћивање, док у потпуности одбацују могућност да је неки проблем могуће решити осмишљавањем различитих стратегија, односно слажу се са чињеницом да за сваки проблем постоји само један прописан пут који води до решења (Lindquist, 1989).

У контрадикцији с претходним истраживачи (Maher & Martino, 1996; Resnick, 1989) у чијем фокусу истраживања је био развој математичког мишљења ученика, дошли су до сазнања да ученици млађег школског узраста поседују изузетне потенцијале који им помажу да адекватно разумеју проблемске ситуације, као и да проналазе различите путеве којима могу доћи до решења постављеног проблема. Дакле, ученици млађег школског узраста углавном нису ограничени на решавање проблема само једним приступом као што је то био случај са ученицима средњошколског узраста, зашто је то тако, може бити последица бројних фактора, а можда и питање за нека будућа истраживања.

Своју полифункционалну улогу проблемска настава је показала и у основношколској математици. С тим у вези до врло важних закључака дошли су Чарлс и Лестер (Charles & Lester, 1984) који су испитивали разлику између успеха ученика који су били активни учесници при спровођењу проблемске наставе и оних ученика који су се са учењем путем решавања проблема сретали путем задатака у уџбеницима. Истраживање је спроведено са ученицима петог и седмог разреда основне школе. Резултати су показали да су ученици који су били подвргнути експерименталном програму остварили виши ниво постигнућа у односу на ученике контролне групе који су кроз задатке из уџбеника настојали да реше одређене проблеме. Овим истраживањем дошло се до важних закључака када су у питању ефекти које остварује проблемска настава: овај наставни систем подстиче ученике да разумеју постављени проблем и створе план и стратегију његовог решавања; помаже ученицима да превазиђу страх од неуспеха и наводи их да решавају проблем на више различитих начина; покреће мисаоне активности ученика и тера их на већу активност.

Фузон и сарадници (Fuson et al., 2000) истражујући разлике у степену постигнућа између ученика који су били под утицајем проблемске наставе и ученика који су радили традиционалним приступом, дошли су до закључка да су ученици са којима је организовано учење путем решавања проблема показали већа постигнућа на тесту знања од ученика који су радили по устаљеном (традиционалном) принципу.

Утицај проблемске наставе на постигнућа ученика у настави математике спроведено је и са азијским ученицима основношколског узраста. У том истраживању учествовало је 76 ученика од чега је 38 ученика чинило контролну и исто толико експерименталну групу. У контролној групи рађено је традиционално, док је експериментална група била под утицајем проблемске наставе. Крајњи исход показао је значајне резултате у корист експерименталне групе која је на тесту показала знатно виши ниво знања од контролне групе. Након овог истраживања аутори су апеловали да би наставници требали више пажње да посвете спровођењу проблемске наставе, те да је неопходно њихово укључивање у релевантне семинаре и обуке које су у вези са овом темом (Riasat et al., 2010).

Барановић и сарадници (2010) су испитивали мишљења учитеља и наставника математике, у вези са наставним системима који се користе у настави у основним и средњим школама у Хрватској. Испитивање је извршено на узорку од 292 наставника и учитеља. Резултати истраживања показују да, према мишљењу учитеља и наставника, у настави математике у школама доминирају традиционални приступ и традиционалне методе поучавања и учења. Проценили су да се у настави математике највећи нагласак ставља на решавање математичких задатака, а мање на употребу математике у свакодневном животу. Дакле, крајњи закључак на основу спроведеног испитивања упућује на то да се у настави математике ретко примењују метода откривања и проблемска настава.

Емпиријско истраживање чији је узорак чинило укупно 500 учитеља и наставника математике у основним школама у Гани, показало је да чак 90,1 % учитеља и наставника не спроводе скоро никако проблемску наставу на часовима математике. То је указало на велики проблем у њиховом образовању, те се приступило имплементацији идеја о програмима обучавања наставника у оквиру иновативних наставних система, с циљем унапређења наставе математике (Nyala, Assuah, Ayebo & Tse, 2016).

Компаративном анализом налаза претходна три истраживања јасно се може утврдити да се наставници више залажу за традиционални приступ, што није својствено савременом математичком образовању. Наиме, наставницима се препоручије да своја усмерења ставе на проблемску наставу, те им се предлаже стручно усавршавање путем разних акредитованих програма (семинари, обуке, радионице, трибине и сл.).

Насупрот претходним истраживањима истраживање које је спровела Јанковић (2016) показује да су наставници ипак донекле свесни значаја који остварује проблемска настава на часу математике. Она је испитивала мишљења и ставове учитеља о учесталости, значају примени и начинима реализације проблемске наставе на часовима математике, након чега је извршила и анализу ставова и искустава ученика у вези са часовима математике који су изведени путем проблемске наставе. Анкетирано је 67 учитеља и 94 ученика трећег разреда основних школа у Врању. Резултати су показали да учитељи и ученици испољавају позитивне ставове када је реч о спровођењу проблемске наставе на часовима математике.

Учитељи увиђају значај и предности примене овог наставног система, док су ученицима часови проблемске наставе врло интересантни уз шта додају да се оваквим видом наставе могу стећи квалитетна знања.

Експериментално истраживање које су спровеле Цотић и Зуљан-Валенчић (2009) имало је за циљ да испита ефикасност примене проблемске наставе на часу математике упоређујући резултате експерименталне и контролне групе. Експериментална група радила је по моделу проблемске наставе, а контролна на устаљен начин. Ефикасност модела спроведена је на узорку од 179 деветогодишњих ученика. Резултати истраживања били су у корист експерименталне групе и показали су да су ученици експерименталне групе много ефикасније решавали сложене математичке проблеме, потом били су сигурнији у своја решења у односу на контролну групу, док су им часови математике који су организовани уз помоћ проблемске наставе били занимљиви. Налази овог истраживања, подударају се са закључком који је извела Јанковић (2016) након свог истраживања, а у вези су са испољеним позитивним односом ученика према проблемској настави.

Пецко (2015) је извршила истраживање са 409 ученика другог разреда основних школа у Хрватској у коме је испитивала утицај проблемске наставе на активности ученика у процесу стицања знања, те је испитивала статус проблемске наставе у односу на предавачку (традиционалну) наставу. Резултати су показали да су ученици који су били подвргнути експерименту (имплементацији проблемске наставе) испољили знатно виши ниво активности у односу на ученике који су били у контролној групи (где се радило традиционалним приступом). Такође ученици који су радили кроз проблемску наставу показали су већи степен мотивације и интересовања за одређене садржаје у односу на ученике из контролне групе. До сада сва наведена претходна истраживања резултирала испољавањем позитивног односа ученика према проблемској настави, што се може посматрати као одређени вид подстрека наставницима да овај наставни систем више преферирају у свом раду.

Тај и Лин (Tai & Lin, 2015) су спровели истраживање чија је кључна претпоставка била веза између математичке писмености и начина решавања проблема у учењу путем решавања проблема. Они су сматрали да ниво математичке писмености ученика знатно утиче на стил и начин решавања проблема. У оквиру истраживања формиране су три групе ученика с обзиром на начин којим су решавали проблеме: (1) ученици који су се при решавања ослањали на различите ресурсе; (2) ученици који решавају проблем користећи различите приступе и начине, те имају мањи страх од неуспеха; (3) ученици који се ослањају на помоћ вршњака око себе при решавању проблема. Резултати који су добијени показују да постоји статистички значајна разлика између начина на који ученици решавају проблем и нивоа математичке писмености коју показују. Дакле, ученици који су проблем решавали различитим приступима и алгоритмима показују највећи ниво математичке писмености, док они који се ослањају на различите ресурсе и помоћ других показују знатно нижу математичку писменост.

Међу главне компетенције које би ученици требали да поседују у XXI веку убрајају се способност решавања проблема и начин креативног размишљања. С обзиром на речено проистекло је истраживање које је спроведно са ученицима седмог разреда у Малангу (Индонезија) чији је циљ био утврдити да ли учење путем решавања проблема подстиче развој креативног мишљења и вештина које могу помоћи у решавању проблема.

Резултати су показали да учење путем решавања проблема позитивно утиче на развој способности које подстичу развој креативног мишљења али и развој способности одговорних за осмишљавање различитих стратегија за решавање проблема (Khoiriyah & Husamah, 2018).

Малиновић-Јовановић и Јанковић (2014) извршиле су експериментално истраживање са 97 ученика другог и трећег разреда основне школе у Врању у коме су испитивале утицај проблемске наставе на ефикасност остваривања програмских задатака о једначинама. Резултати истраживања су показали да проблемска настава има изразито позитиван утицај када је у питању степен остварености програмских задатака у вези са једначинама и у другом и у трећем разреду основне школе.

Испитивање утицаја проблемске наставе на постигнућа ученика, био је циљ многих истраживања (Хајдуковић- Јандрић и Обрадовић, 2007; Karatas & Baki, 2013) која су потврдила високу ефикасност проблемске наставе коју она оставрује у подручју ученичких постигнућа. Спровођење проблемске наставе има искључиво позитивне ефекте на поспешивање постојећих и изградњу нових знања ученика. Важно је истаћи и чињеницу да овакав метод учења ученике, оспособљава да своја знања примене у новим околностима (Dochy et al., 2003).

Инглиш и Вотерс (English & Watters, 2005) извршили су експериментално истраживање са ученицима четвртог разреда основне школе у Аустралији у коме су ученици решавали реалне проблеме превodeћи их у математички контекст. Циљ истраживања био је да се код ученика утиче на развој следећих способности: (а) приказивање математичких података у форми текста и дијаграмима; (б) тумачење и разумевање једноставних табеларних података; (в) прикупљање и анализа података; (г) вршење размене завршних модела са својим вршњацима. Резултати овог истраживања су показали да су ученици успешно тумачили податке и представљали их различитим моделима, те се дошло до закључка да је способност моделовања потребно развијати од најранијег школског узраста, односно и пре четвртог разреда основне школе. До сличних резултата дошао је и Ли са сарадницима (Lee et al., 2010) који су извршили истраживање чији је главни циљ био открити колики је ниво активирања ученика средњих школа у Сингапуру да одређену проблемску ситуацију трансформишу у одговарајући модел, односно колико ученици активирају своје мисаоне порцесе ако проблем решавају симболичким путем. Истраживање је показало да су мисаони нивои активације у оба приступа високи, те да је моделски приступ знатно ближи ученицима јер је мање апстрактан и визуелнији је од симболичког приступа.

Као један од главних недостатака у васпитно-образовном систему врло често се наводи некомпетентност и недовољна обученост наставника. То су нам потврдила истраживања која су се бавила проблемском наставом (Nyala, Assuah, Ayebo & Tse, 2016; Беарановић и сар., 2010; Riasat et al., 2010), а сада се са сличном ситуацијом сусрећемо када је у питању математичко моделовање. Многа истраживања (Стјефановић, 2012; Niss, Blum & Galbraith, 2007) резултирају претпоставкама да учитељи и наставници не поседују адекватне компетенције када је у питању развој способности математичког моделовања. Наиме, они не познају довољно примера моделовања који могу помоћи при решавању различитих проблема, те код ученика та способност остаје неразвијена и неискоришћена.

Истраживања која су у свом фокусу имала алгебарске идеје све до краја XX углавном су била усмерена на расветљавање проблема са којима се ученици сусрећу при учењу и разумевању алгебре. Наиме, говорило се о томе шта ученици нису у могућности да ураде, док су мали део изражавања чинила она која су објашњавала шта ученици могу да ураде (Lins & Karut, 2001). С тим у вези у наредном тексту упознаћемо се са различитим истраживања из оквира алгебарског образовања и оправдати тврдње Линса и Капута.

Сфард (Sfard, 1987) на основу свог истраживања на узорку од 94 ученика старости од 14 до 16 година, закључује да ученици много боље једноставне текстуалне проблеме решавају дајући вербална упутства, него састављањем једначина. Проблем са којим су се ученици сусретали приликом решавања једначина крије се у неадекватном посматрању релације једнакости у аритметици, где се тај знак схвата као команда „израчунај“. Сличне резултате добили су и Ли и сарадници (Li et al., 2008) који су извршили истраживање са ученицима шестог разреда у Америци, на основу кога су дошли до закључка да ученици имају потешкоће да разумеју алгебру (једначине) јер претходно нису добро овладали знаком једнакости.

Увођење алгебарских идеја у почетну наставу математике Фостер (Foster, 1994) је посматрао кроз решавање једначина у следећим облицима: $2 + 3 = __$ (А) $2 + __ = 5$ (Б) $__ + 3 = 5$ (В). С тим у вези он истиче да једначину типа (А) ученици углавном решавају са лакоћом и ту могу искористити било коју методу бројања. Међутим, ученици првог разреда не могу решити једначине под (Б) и (В) не укључујући изнадпросечне ученике. Оно што натпросечни ученици могу решити у другом разреду то просечан ученик може решити у трећем разреду. Према његовом мишљењу просечним ученицима једначине типа (Б) и (В) углавном задају потешкоће све док успешно не савладају везу између рачунских операција сабирање и одузимање.

Кијеран (Kieran, 1982) је извршила експеримент са ученицима шестог разреда и дошла је до закључка да ученици врло лако посредством једности облика $35 + 42 = 77$ могу записати једнакост $35 = 77 - 42$, међутим то знање у многим случајевима нису успели да примене приликом решавања једначина. Конкретније речено, ученици нису били успешни када је требало на основу једнакости $x + 42 = 77$, записати једнакост $x = 77 - 42$, што потврђује постојање проблема који смо споменули.

Велдер (Welder, 2012) анализирајући грешке које ученици често праве у алгебарском окружењу дошао је до закључка да ученици како млађег тако и старијег школског узраста врло често непромишљено приступају поједностављивању алгебарских израза. Рецимо, израз облика $39 \cdot x - 4$ у поједностављеној форми виде као $35 \cdot x$, што није исправно. Кери, Левис и Бернард (Carry, Lewis, & Bernard, 1980) такође су увидели сличан проблем код ученика, али овога пута приликом решавања једначина са више рачунских операција. Ученици наилазе на извесне потешкоће најпре када је потребно поједноставити одређену једначину, а потом и приликом избора стратегије која им је потребна да би једначину решили.

Ванг (Wong, 2015) испитујући аспекте на којима се темеље потешкоће ученика при учењу алгебре дошао је до закључка да су начин на који се алгебра учи и когнитивни аспект најодговорнији за настајање потешкоћа код ученика. Ученици нису у могућности да одређену једначину саставе уз помоћ симбола јер не увиђају везу између алгебре и аритметике и слово врло често не доживљавају као променљиву.

Хершовиц и Линчевски (Herscovics & Linchevski, 1994) анализирајући развијеност способности ученика које су им неопходне за разумевање алгебарских нотација дошли су до закључка да адолесценти углавном не показују могућности да манипулишу непознатом. Узрок који је довео до таквог резултата садржан је у неадекватним плановима и програмима који ученицима не дозвољавају да самостално размишљају и представљају своје алгебарске идеје (Зељић, 2014).

Као што видимо већина истраживања која имају алгебарски концепт показала су сличне, или пак индентичне крајње исходе где ученици различитих школских узраста наилазе на баријере при решавању једначина или самом разумевању алгебре, јер на погрешан начин интерпретирају и доживљавају слово и не манипулишу са њим као са непознатом или променљивом. Међутим, истраживање које је спроведено са ученицима узраста од 8 до 11 година указује на контрадикторност с обзиром на претходна истраживања. Дакле, резултати су показали да ученици овог узраста врло успешно могу користити алгебарске нотације у смислу представљања бројних проблемских ситуација, такође могу и успешно утврђивати односе између елемената који су познати и непознати у датом проблему. Такође успешно могу знак једнакости сагледати кроз шири контекст, потом представити непознате величине словом, могу радити са непознатом, записивати једначине, па чак и успешно решавати сложене линеране једначине (Brizuela & Schliemann, 2004).

Сенкул и Ердоган (Şengül & Erdoğan, 2014) су спровеле истраживање са 235 (102 девојчице и 133 дечака) ученика шестог разреда основне школе у Истамбулу у коме су испитивале колико су ученици наведеног узраста способни да решавају алгебарске проблеме ослањајући се на процедурална и декларативна знања. Резултати су показали да ученици генерално имају врло ниске перформансе када је у питању решавање алгебарских проблема али да су девојчице показале знатно виши ниво знања у односу на дечаке. Традиционални приступ у настави алгебре ученике наводи на искључиво процедурални приступ при решавању алгебарских проблема, што не подстиче развој мишљења ученика и не утиче на повећање нивоа активности (Wong, 2005).

Реализујући алгебарске садржаје на часу математике малезијски наставници углавном преферирају учење путем решавања проблема, што је контрадикторно малезијским уџбеницима математике који углавном захтевају процедурално решавање алгебарских проблема (Singh, 2003). Како би се подстакла кореспонденција уџбеници математике би требало да прате захтеве савременог математичког образовања и васпитања.

Зељић (2013) је извршила истраживање чији је главни фокус био усмерен на испитивање карактеристика појмовне структуре математичких садржаја у уџбеницима (седам уџбеника) за трећи разред основне школе у Србији у оквиру наставне теме *Неједначине*. Добијени резултати показују да се појмовне структуре у уџбеницима (4 уџбеника) за трећи разред у домену неједначина изрзито разликују и нису усклађене са наставним програмом. Поред различитих појмовних структура у седам анализираних уџбеника уочавају се и различити методички приступи када је реч о наставној теми *Неједначине*.

Шлиман и сарадници (Schliemann et al., 2003) су након свог лонгитудиналног истраживања у коме је учествовало 70 ученика узраста трећег и четвртог разреда основне школе из Бостона дошли до закључка да ученици на том узрасту могу успешно разумети основне алгебарске репрезентације и идеје. Односно, ученици трећег и четвртог разреда могу се успешно бавити раном алгебром. Сличним исходом резултирало је и истраживање спроведено са ученицима старости од 8 до 9 година потврдило је да ученици тог узрастног доба могу користити познате „односе“ како би добили оно што је непознато. Рецим, на основу изјаве: „Том је за 4 cm виши од Мери, а Мери је за 6 cm нижа од Лесли“ ученици су успешно приказали Томову висину с уз помоћ висине Мери и Лесли, односно, успешно су представили висину од Мери уз помоћ висине Тома и Лесли, те су са успехом приказали и висину Лесли на основу висина Тома и Мери. Што потврђује да ученици овог узраста могу успешно да развијају идеју функције (Carragher & Schliemann, 2015).

Насупрот претходним истраживањима Варен (Warren, 2003) је након спроведеног истраживања са аустралијским ученицима старости од 8 до 9 година дошао до закључка да ученици имају велике потешкоће при решавању проблема чији је продукт састављање једначина и одређивање непознате.

Кијеран (Kieran, 2004) наглашава да је кроз своја спроведена истраживања схватила да највећи проблем лежи у проналаску адекватних начина који ће ученицима помоћи да се чувају замке везе између једначина и неједначина. Истраживање које је спровела са ученицима осмог разреда у Јапану показало је да ученици врло често поведени поступком решавања једначина, за неједначину не пронађу скуп њених решења већ напишу једно решење. Урсини и Тригверос такође се слажу са констатацијама Кијеран и истичу да су у својим истраживањима закључили да ученици најчешће греше јер не разумеју везу између једначина и неједначина (Ursini and Trigueros, према: Зељић, 2014).

Шмитау и Морис (Schmittau & Morris, 2004: 81-83) су у свом истраживању дошли до закључка који се не подудара са ставовима које износи Кијеран, њихови налази су показали да ученици могу на основу датих неједнакости „ $C < P$ “ и „ $P > B$ “ да закључе да се C може написати као $P - B$ ($C = P - B$), односно $P = C + B$. То заправо потврђује чињеницу да ученици успешно могу прећи из подручја неједнакости у област једнакости, и обрнуто као и да рачунске операције сабирања и одузимања доживљавају као сродне акције. Они су такође истакли да овакав приступ развија и подстиче „теоријско размишљање“ које према Виготсоком представља „суштину алгебре“.

Драјфус и Хох (Dreyfus & Hoch, 2004) су у свом истраживању са ученицима средњих школа у Израелу, дошли до закључка да ти ученици нису у могућности да структурално схвате једначине, те да су резултати показали доминацију процедуралног схватања једначина.

Према TIMSS 2015 циклусу истраживање је показало да су ученици 4. разреда основне школе у Србији у просеку дали 62,67% тачних одговора из области *Изрази, једначине и релације*, у оквиру које су идентификоване следеће групе задатака: „(1) проналажење непознатог броја или непознате операције у бројевном изразу (нпр. $17 + w = 29$); (2) препознавање или писање израза како би се представила проблемска ситуација која укључује непознате вредности; (3) препознавање и коришћење односа у јасно дефинисаном бројевном низу (нпр. описати релацију између суседних чланова и идентификовати парове природних бројева према датом правилу)“ (Милинковић и сар., 2017: 37).

Као што смо нагласили на почетку, према нашим налазима и након проучавања бројне релевантне литературе, можемо истаћи да се нисмо сусрели са истраживањима која повезују проблемску наставу и методе решавања једначина и неједначина, конкретније ниједно од истраживања није имало за циљ да ефекте проблемске наставе сагледа кроз контекст математичког моделовања. Углавном су сва истраживања имала чисто компаративан карактер у смислу увиђања предности које проблемска настава остварује на супрот традиционалној. С обзиром на све речено одлучили смо да дубље и опширније сагледамо и расветлимо ефекте проблемске наставе које она остварује у развоју способности математичког моделовања.

II МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

1. Проблем и предмет истраживања

Бројни су разлози због којих смо се определили да дубље истражимо феномен математичког моделовања. Савремена настава математике захтева правовремено информисање у контексту иновативних наставних система који доприносе развоју ставралачког и критичког мишљења, као и подстицању и развоју способности математичког моделовања ученика. Имајући у виду претходно наведено из подручја наставних система посебно смо издвојили проблемску наставу желевши да размотримо њену улогу и значај у почетној настави математике када је у питању развој способности математичког моделовања. С тога приоритет у нашем истраживању био је усмерен на сагледавање ефеката проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања приликом решавања једначина и неједначина у четвртом разреду основне школе. С друге стране сагледали смо и утицај уведеног модела (проблемске наставе) на тематске области које су изван једначина и неједначина и тако испитали постојаност и присуство трансфера ученичког знања.

Досадашња истраживања су показала да недостаци у данашњем образовно-васпитном систему и даље постоје, те се као главни наводе: недовољна активност ученика, несамосталност ученика, фаворизовање механичког учења напамет и смисленог вербалног учења, док учење путем открића, стваралачко учење и кооперативно учење значајно изостају. Пошто је проблемска настава нарочито погодна за примену код учења математичких садржаја, поставља се питање: *да ли је она ефикасан облик наставе који допрноси развоју способности математичког моделовања?* То је био проблем који се нашао пред нама и који смо покушали да решимо, разматрајући га са теоријског и експерименталног становишта.

Предмет нашег истраживања је испитивање и проучавање ефеката проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања приликом решавања једначина и неједначина у четвртом разреду основне школе, у циљу унапређивања квалитета ученичких знања.

Како се на проблемску наставу гледа као на врло ефикасно средство којим наставници доводе ученике у ситуацију да самостално откривају, истражују и надограђују своја знања, сматрамо да има и велики удео у развоју способности математичког моделовања. Искуства која ученици стичу при сусрету са проблемском наставом неопходна су им да своје способности и знања учине трајним и применљивим у неким сличним или потпуно новим ситуацијама.

2. Циљ и задаци истраживања

Ослањајући се на утврђени проблем истраживања формулисали смо циљ и задатке истраживања. Примарни циљ нашег истраживања је експериментално испитивње ефеката проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања. Главна тенденција је да се испита ефикасност експерименталног програма на развој способности математичког моделовања при решавању једначина и неједначина у четвртом разреду основне школе, као и намера да се утврди утицај уведеног модела на трансфер знања, с обзиром на учење истих математичких садржаја традиционалним (устаљеним) приступом.

Да би се постављени циљ реализовао, било је потребно остварити следеће задатке истраживања:

1. Испитати да ли постоје разлике између ученика експерименталне и контролне групе у постизању успеха израженим резултатом на иницијалном тесту;
2. Испитати у којој мери је код ученика четвртог разреда основне школе применом проблемске наставе могуће утицати на развој способности математичког моделовања при решавању једноставних једначина и неједначина;
3. Утврдити да ли ће ученици четвртог разреда основне школе након спровођења проблемске наставе успешније решавати сложене једначине и неједначине уз помоћ математичког моделовања;
4. Испитати колика је успешност ученика у састављању текстуалних задатака у вези са једначинама и неједначинама на основу задатих иконичких и симболичких представа, након спровођења проблемске наставе ;
5. Испитати ефикасност проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања у ситуацијама изван тематских области једначина и неједначина;
6. Испитати ставове ученика експерименталне групе у вези са ефектима имплементације проблемске наставе на часу математике.

3. Хипотезе истраживања

Руководећи се постављеним проблемом и предметом истраживања, утврђеним циљем и задацима одредили смо општу хипотезу, а потом и посебне (помоћне) хипотезе истраживања.

Општа радна хипотеза истраживања:

Проблемска настава представља ефикасно средство у развоју способности математичког моделовања, односно евидентна је разлика у оствареном успеху ученика између експерименталне и контролне групе, и то у корист ученика који су били под утицајем експерименталног програма.

Позитивни ефекти које проблемска настава пружа развоју способности математичког моделовања значајни су са становишта решавања једначина и неједначина, на основу чега су дефинисане посебне хипотезе:

H_1 - Не постоје значајне разлике између оствареног успеха ученика експерименталне и контролне групе на иницијалном тесту;

H_2 - Реализација проблемске наставе у великој мери утиче на развој способностиматематичког моделовања код ученика четвртог разреда основне школе, приликом решавања једноставних једначина и неједначина;

H_3 - Ученици без потешкоћа решавају сложене једначине и неједначине применом математичког моделовања, након спровођења проблемске наставе;

H₄- Ученици из експерименталне групе показују знатно већи успех у односу на ученике из контролне групе при састављању текстуалних задатака у вези са једначинама и неједначинама на основу задатих иконичких и симболичких представа;

H₅- Ученици који су били под утицајем експерименталног програма показују виши ниво знања у домену решавања задатака изван тематских области једначина и неједначина у односу на ученике контролне групе;

H₆- Ставови ученика експерименталне групе у вези са ефектима које остварује проблемска настава на часу математике су позитивни.

4. Варијабле у истраживању

На основу анализе свих сегмената, проблема и предмета истраживања одредили смо варијабле истраживања које према функцији у истраживању, имају статус зависних и независних варијабли.

Зависна варијабла је: постигнућа ученика на тестовима.

Независна варијабла је: овладавање методама решавања једначина и неједначина под утицајем проблемске наставе (модел који се уводи).

5. Методе, технике и инструменти истраживања

Истраживање које смо спровели подразумева експерименталну, дескриптивну научноистраживачку методу, као и методу теоријске анализе. Експерименталну методу у овом истраживању посматрали смо као базичну јер смо упоређивали ефекте проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања при решавању једначина и неједначина с једне стране, са нивоом развоја математичког моделовања под утицајем класичне наставе, с друге стране.

У истраживању је коришћен експеримент са паралелним групама. У сваку од две експерименталне групе био је уведен експериментални програм, док се настава у две контролне групе реализовала на традиционални (класичан, устаљен) начин. Традиционални начин извођења наставе темељи се на доминантној, предавачкој улози наставника који ученику испоручује и преноси готова знања (Woodlief, 2007). Наставник кроз фронтални облик рада са учеником остварује једносмерну комуникацију, која нарушава сваки вид интеракције. У традиционалном приступу не постоји довољно времена за ученика, где он може да испољи своје самосталне активности (Богнар и Матијевић, 2002). Арбунић и Костовић-Врањеш (2009) објашњавају да овакав приступ није прикладан за развијање и унапређивање способности критичког и стваралачког мишљења, решавања проблема и нема никакв значај за целоживотно учење. Осим тога, исти аутори, ову наставу третирају и као ограничавајућу јер су ученици ограничени по питању стицања знања, што би значило да се наставник углавном ослања само на уџбеник током преношења знања. Дакле, наставник ученицима преноси знања, а ученици се труде да их усвоје, репродукују и примене у задатим ситуацијама. Иако је савремена методика наставе математике препоручује активно учење и наставу усмерену на ученика, у пракси врло често није тако, јер се још увек негује приступ где доминантну улогу игра наставник.

Методе традиционалног приступа примењивао је наставник у нашој контролној групи, што нам може потврдити снимак часа (Прилог 6). Дескриптивна метода примењена је код анализе, обраде и интерпретације резултата тестова. Метода теоријске анализе свој значај је показала у проучавању прикупљених теоријских и практичних сазнања као и постојеће литературе у вези са проблемском наставом, математичким моделовањем и алгебарским садржајима.

У намери да се провере ефекти проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања примењена је техника тестирања. Тестирање је обављено у три наврата. Прво, пре почетка деловања експерименталног фактора – иницијално мерење (Прилог 1), друга два-финална (Прилог 2 и Прилог 3), након завршетка експерименталног програма. Концепција тестова, њихов садржај и резултати које су ученици постигли били су нам адекватан извор података уз помоћ којих смо извршили процену ефикасности проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања.

У истраживању од инструмената користили смо следеће тестове:

- иницијални тест знања (садржаји у вези са решавањем једначина и неједначина);
- први финални тест знања решавања једначина и неједначина након развоја способности математичког моделовања под утицајем проблемске наставе;
- други финални тест знања, којим смо испитали примену знања изван тематских области једначине и неједначине. Овим тестом прикупили смо податке у вези са постојањем трансфера учења на нове садржаје.

Применом методе квалитативне анализе спровели смо циљано посматрање и анализу активности (одабраних) ученика на часовима проблемске наставе (белешке и запажања од стране посматрача часа, користили смо у сврху писања детаљног извештаја о току реализоване активности).

Такође извршили смо и индивидуално интервјуисање ученика експерименталне групе (44 ученика) које се односило на испитивање ставова ученика у вези са улогом и значајем проблемске наставе на часу математике. Дакле ученички водич за интервју базирао се на следећим темама: општи утисци о математици, ставови ученика у вези са проблемском наставом на часу математике и мишљења ученика у вези са задацима у оквиру проблемске наставе. Сваки ученик је одговорио на 10 формираних питања (Прилог 4). Учесницима интервјуа (ученицима) обезбеђена је пријатна атмосфера, те су ученици могли слободно да искажу своје ставове и мишљења у вези са темом.

6. Узорак истраживања

Узорак овог истраживања чинили су ученици експерименталне и контролне групе и то 88 ученика који су у школској 2017/2018. години похађали четврти разред основне школе у Крупњу и Лозници. Пошто смо се определили за експеримент са паралелним групама, формирали смо две групе ученика – експерименталну и контролну групу. Узорак има елементе случајног и групног узорка. Случајним избором одабрали смо основне школе за експерименталну и контролну групу. Експерименталну групу чинило је 44 ученика четвртог разреда у ОШ „Боривоје Ж. Милојевић“ у Крупњу, док је контролну групу чинило 44 ученика истог разреда у ОШ „Анта Богићевић“ у Лозници. Кажемо да је узорак групни јер смо одабрали већ формиране групе ученика – одељења.

7. Опис истраживачких активности

Истраживање је реализовано у периоду мај – јун 2018. године, и то кроз следеће фазе:

- израда припрема за час за спровођење проблемске наставе у овладавању алгебарским садржајима (једначинама и неједначинама) ;
- формирање експерименталних и контролних група;
- иницијално тестирање ученика контролне и експерименталне групе;
- реализација наставних часова (од стране аутора рада) по утврђеном моделу у експерименталној групи и реализација наставних часова (од стране учитеља) класичним (традиционалним) приступом у контролној групи;
- прво финално (завршно) тестирање ученика контролне и експерименталне групе којим смо утврдили ефекте проблемске наставе на развој способности математичког моделовања (при решавању једначина и неједначина);
- друго завршно тестирање контролне и експерименталне групе којим смо испитали утицај проблемске наставе на решавање задатака изван тематских области једначина и неједначина (трансфер знања);
- спровођење интервјуа са ученицима експерименталне групе;
- статистичка обрада података;
- извођење и инетрпретација закључака.

За потребе овог истраживања распоред и број часова релевантних наставних јединица био је унапред утврђен, па су експериментална и контролна група имале једнак број часова. Реализација се извела у оквиру следећих наставних јединица:

Мај

1. Једначине са множењем и дељењем – обнављање;
2. Неједначине са множењем и дељењем- обрада;
3. Неједначине са множењем и дељењем- утврђивање;

Јун

4. Једначине и неједначине са сабирањем и одузимањем- утврђивање;
5. Једначине и неједначине са множењем и дељењем- утврђивање;
6. Једначине и неједначине – вежбање.

Експериментални програм у ОШ „Боривоје Ж. Милојевић“ изводио је сам истраживач (аутор овог рада), док је контролна група радила уобичајено са својим наставником. Битно усмерење истраживача било је и на израђивању припрема за час (шест модела) које су конципиране са становишта проблемске наставе. Свака наставна јединица подразумевала је максимално активирање ученика у смислу: улагања мисаоних напора да се задата проблемска ситуација адекватно разуме; сагледавања проблема са различитих аспеката; осмишљавања различитих стратегија и модела при решавању једначина и неједначина (једноставних и сложених); подстицања и употребе критичког и стваралачког начина размишљања; изналажења различитих алгоритама које воде до решења постављених проблема; превођења једначина и неједначина из иконичког окружења у симболичко и обрнуто; осмишљавања текстуалних форми које су оличење иконичких и симболичких представа једначина и неједначина.

Препаративна фаза часа огледала се у вођењу дијалога између наставника и ученика у вези са поствљеном проблемском ситуацијом, у којој је наставник имао искључиво мотивациону улогу, док је функција ученика била да активира своје мисаоне процесе и покаже заинтересованост за предстојеће активности. У даљем току часа, тачније у оперативној фази, ученици су преузимали истраживачке активности бавећи се моделовањем при решавању једначина и неједначина. Ову фазу часа употпуњавала је стална интеракција и кооперативан однос између ученика међусобно, али и између ученика и наставника по потреби. Бавећи се компарацијом својих одговора са одговорима других ученика, ученици су долазили до исправних закључака, док су у исто време одбацивали идеје које су се показале као неадекватне и непромерене приликом решавања датог проблема. У верификативној фази часа ученици су говорили о утисцима о квалитету спорведеног часа и упознавали се са карактеристикама домаћих задатка (посредством наставника), који су били намењени за самосталан рад ван редовне наставе. Ови путем ученици су побољшавали способности своје комуникације с једне стране, али и оснаживали социјализацију с друге стране. Улога домаћих задатака састојала се у унапређивању самосталних активности ученика у контексту примене и провере стечених знања.

7. Статистичка обрада података

За статистичку обраду података коришћени су Microsoft Excel и статистички пакет SPSS Statistics 20 за рачунање и примену метода из прве генерације статистичких техника, организовање података, контролу и сл. Обрада података била је подељена у више сегмената. Дакле, за сваку примењену варијаблу најпре су израчунати следећи статистички показатељи:

- (1) аритметичка средина (AS),
- (2) стандардна девијација (S),
- (3) минимални резултат (MIN),
- (4) максимални резултат (MAX),
- (5) коефицијент варијације (KV),
- (6) асиметричност дистрибуције - скјунис (SKJ) и
- (7) хомогеност дистрибуције – куртозис (KUR).

Након тога извршено је тестирање нормалности дистрибуције за сваку варијаблу појединачно. Провера одступања од нормалне дистрибуције извршена је методом Колмогоров-Смирнов теста. Осим тога, нормализација резултата тестирања значајна је због благовременог откривања екстремних вредности, који ако се на време не отклоне могу имати за последицу погрешну интерпретацију резултата. Провера разлика између експерименталне и контролне групе у зависности резултата нормалности дистрибуције, тестирана је применом анализе варијансе за варијабле у којима тест нормалности дистрибуције није показивао статистички значајно одступање, односно Mann Whitney U тест за варијабле код којих је одступање од нормалне дистрибуције било статистички значајно.

III АНАЛИЗА И ИНТЕРПРЕТАЦИЈА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

За потребе овог истраживања користили смо експеримент са паралелним групама (експериментална и контролна група). Сачинили смо експериментални програм чије је садржај био представљен задацима који су погодовали развоју способности математичког моделовања. Са ученицима експериментлане групе реализовано је укупно шест часова у вези са решавањем једначина и неједначина, док су ученици контролне групе радили на устаљен (традиционални, класичан) начин. Дакле, извршили смо најпре иницијално, а потом и два финална мерења. Током спровођења овог истраживања прикупљен је велики број података, који су обрађени и представљени с обзиром на проблеме који су били у домену нашег интересовања, а у складу са постављеним циљем и задацима истраживања. Приликом анализе и приказа добијених резултата позивали смо се на задатке али и на њихове делове из тестова те смо их означавали на следећи начин:

$i1a_n$ - иницијални тест, 1. задатак, под а;
 $f1a_n$ - први финални тест, 1. задатак, под а;
 $ff1a_n$ - други финални тест, 1. задатак, под а;

$n=1$ - поставка математичког записа,
 $n=3$ - иконишка представа једначине/неједначине,
 $n=5$ - састављање текста на основу иконишке или симболичке представе,
 $n=6$ - извођење закључака.

Анализирањем и интерпретирањем резултата овог истраживања представљена је квантитативна анализа, која нам је била основа за извршење квалитативне анализе.

Табела 11. Дескриптивне карактеристике узорка за све променљиве

Легенда: AS - Аритметичка средина; S - Стандардна девијација; MIN - минимални резултат; MAX - максимални резултат; SKJ - скјунис; KUR- куртозис; KV - коефицијент варијације; KS - статистичка значајност Колмогоров-Смирновог теста.

Варијабле	Број ученика	AS	S	MIN	MAX	SKJ	KUR	KV	KS
Иницијални тест	88	19,27	4,85	8	30	-,20	-,22	25,2	,02
I финални тест	88	21,52	10,37	3	38	-,13	-1,18	48,2	,00
II финални тест	88	4,47	3,54	0	11	,30	-1,36	79,2	,00
Сложене једначине и неједначине	88	3,16	1,73	0	8	,61	,57	54,9	,00
Једноставне једначине и неједначине	88	14,47	3,29	6	22	-,35	,03	22,7	,00
Састављање текста на основу иконишких и симболичких представа	88	1,63	1,15	0	3	-,38	-1,30	70,6	,00

Прегледом Табеле 11, позитивне вредности асиметрије показују да је већина добијених резултата лево од средње вредности, међу мањим вредностима, а негативне вредности асиметрије показују да је већина резултата десно од средње вредности, међу већим вредностима.

Сходно томе, видимо да су ученици имали више скорове на иницијалном тесту, првом финалном тесту, при решавању једноставних једначина и неједначина и састављању текста на основу икониких и симболичких представа, док су други финални тест и сложене једначине и неједначине за ученике били теже. Може се уочити да у варијаблама Састављање текста на основу икониких и симболичких представа, I финални тест и II финални тест постоји тенденција појаве нешто веће распршености резултата у односу на аритметичку средину.

Табела 12. Основни дескриптивни статистици Е групе и К групе

	Варијабле	AS	S	MIN	MAX	SKJ	KUR	KV	KS
Експериментална група N=44	Иницијални тест	19,05	5,14	8	30	-,11	-,33	27,0	,20
	I финални тест	30,09	5,74	14	38	-1,08	1,05	19,1	,14
	II финални тест	7,02	2,77	1	11	-,74	-,46	39,5	,00
	Сложене једначине и неједначине	3,07	1,80	0	8	,70	,89	58,6	,00
	Једноставне једначине и неједначине	14,27	3,34	6	22	-,07	-,08	23,34	,20
	Састављање текста на основу икониких и симболичких представа	1,68	1,19	0	3	-,45	-1,35	71,1	,00
Контролна група N=44	Иницијални тест	19,50	4,59	8	28	-,43	,08	23,5	,10
	I финални тест	12,95	5,87	3	24	-,25	-1,04	45,3	,14
	II финални тест	1,91	2,05	0	10	1,79	4,78	107,7	,00
	Сложене једначине и неједначине	3,25	1,69	0	8	,53	,46	51,9	,00
	Једноставне једначине и неједначине	14,66	3,26	6	21	-,67	,47	22,2	,02
	Састављање текста на основу икониких и симболичких представа	1,57	1,11	0	3	-,34	-1,24	70,7	,00

Резултати коефицијента варијације који су прелазили 15% већ на самом почетку указали су да је нормалност дистрибуције нарушена, те да је репрезентативност аритметичке средине мала. Колмогоров-Смирновим тестом (Kolmogorov-Smirnov test) проверено је одступање резултата од нормалне дистрибуције.

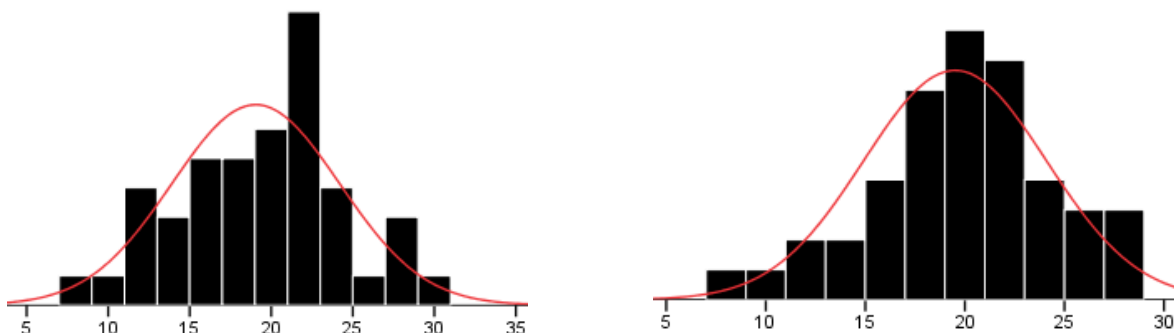
Вредност Колмогоров-Смирновог теста за варијабле Иницијални тест, I финални тест и Једноставне једначине и неједначине већа је од 0,05 ($p > 0,05$), те је расподела резултата нормална, док је у варијаблама II финални тест, Сложене једначине и неједначине и Састављање текста на основу иконичких и симболичких представа нарушена нормална расподела јер је вредност Колмогоров-Смирновог теста мања од 0,05 што оправдава чињеницу да се резултати не групишу претежно око средње вредности.

Прегледом Табеле 12 намеће се генерални утисак да нема изражене асиметрије у представљеним варијаблама. Вредности сирових резултата су у оквиру прихватљивих. Вредност скјуниса код експерименталне групе је благо снижена у варијабли I финални тест и указује да резултати имају тенденцију да буду нешто више нагомилани десно у односу на аритметичку средину. Код контролне групе резултати имају тенденцију да се нагомилавају у лево у односу на аритметичку средину у варијабли II финални тест. Резултати су углавном код свих варијабли у прихватљивом опсегу искривљености (нагнутости). Вредности издужености дистрибуције код контролне групе указују на повећану хомогеност узорка испитаника у варијабли II финални тест, те да постоји тенденција ка смањеној хомогености у варијабли I финални тест. Све израчунате вредности у циљу лакшег уочавања евентуалних дистрибутивних аберација приказане су и графички, у виду хистограма, те се и на тај начин покушало поентирати на даље методолоке правце који предстоје.

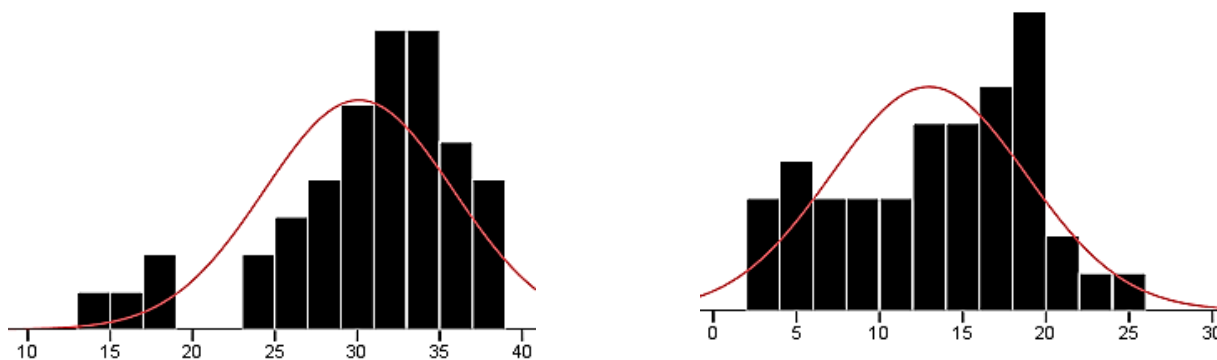
Дистрибуција варијабли експерименталне и контролне групе:

а) експериментална група

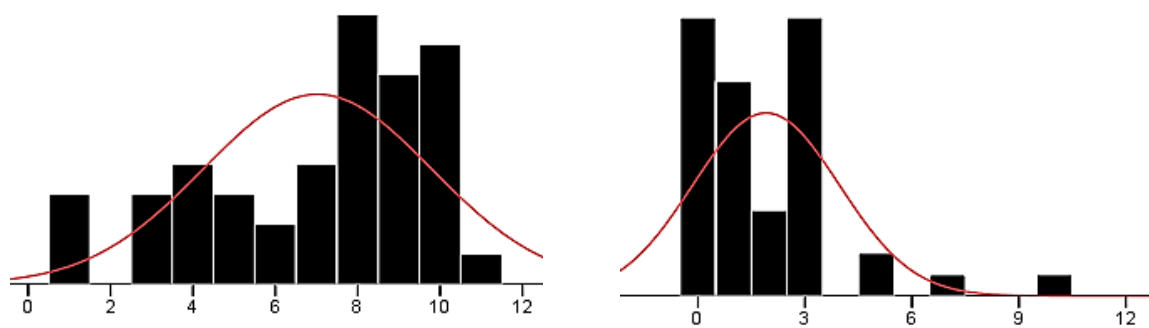
б) контролна група



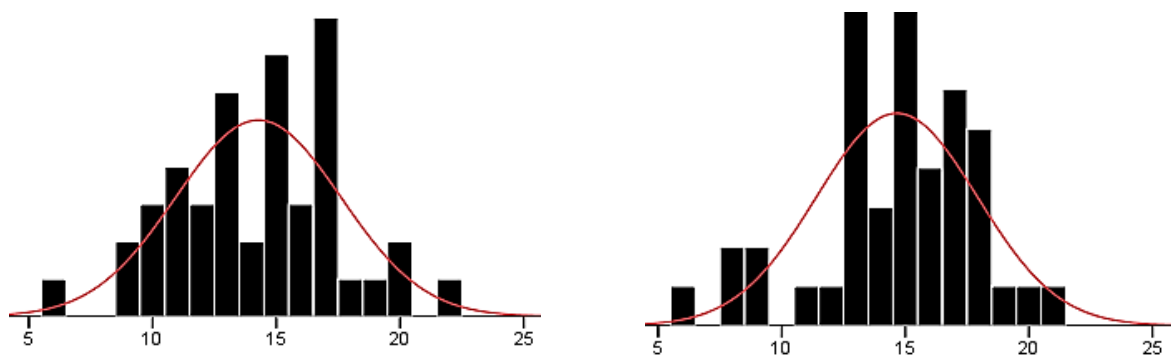
Слика 22. Хистограм расподеле успеха на ницијалном тесту



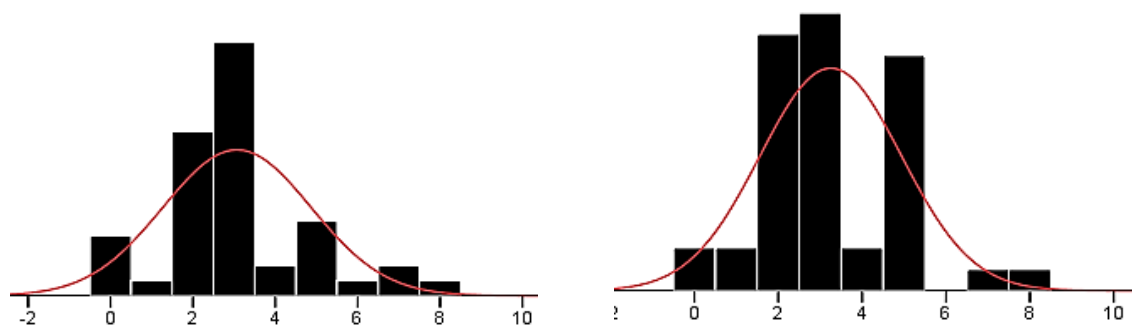
Слика 23. Хистограм расподеле успеха на I финалном тесту



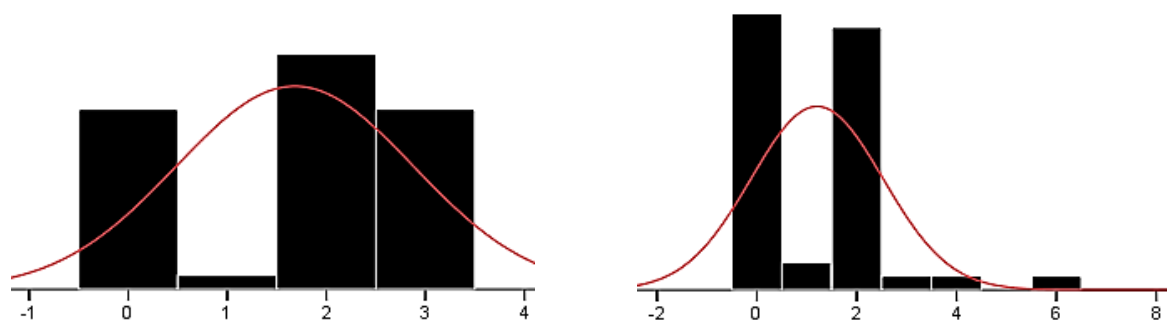
Слика 24. Хистограм расподеле успеха на II финалном тесту



Слика 25. Једноставне једначине и неједначине



Слика 26. Сложене једначине и неједначине



Слика 27. Састављање текста на основу иконичких и симболичких представа

Анализирајући резултате приказане у претходним табелама и хистограме било је могуће донети следеће закључке. Наиме, сви резултати коефицијената варијације, који су прелазили теоретску апроксимацију од 15 већ на самом почетку су били индикација да је нормалност дистрибуције анализираних варијабли нарушена.

Наведено је додатно и егзактно потврђено применом Колмогоров-Смирнов теста који је у четири од шест варијабли код контролне групе указао да постоје статистички значајне разлике у одступању од нормалне дистрибуције, док је код експерименталне групе исто потврђено у три варијабле. Наведено је битно определило технику даље обраде података, те указало да би исправан одабир била нека од непараметријских техника за утврђивање разлика између група. Имајући претходно у виду, даљи поступак био је да се егзактно утврде разлике између експерименталне и контролне групе анализираног узорка испитаника.

Анализа варијансе коришћена је за оне варијабле где је параметријска техника адекватна, односно код варијабли са нормалном расподелом резултата, као и Mann-Whitney U тест, где је нормалност дистрибуције нарушена.

С обзиром на неопходност за одабиром непараметријске технике (Mann-Whitney U тест) у нашем истраживању, имали смо потребу да такву ситуацију објаснимо кроз неки реалан разлог или претпоставку зашто је то тако. Мишљења смо, да је за коришћење овог вида истраживачке технике одговоран психолошки профил ученика, који се иначе није налазио у оквирима нашег истраживања које је спроведено у домену методике наставе математике. Сматрамо да су ученици експерименталне групе, који су били под утицајем модела, показали изузетну адаптивност, заинтересованост и спремност за нове начине рада на часовима математике на којим је спроведена проблемска настава.

1. Анализа резултата иницијалног теста

Иницијални тест који смо сачинили садржао је 11 задатака који су с обзиром на садржај подељени у три целине: *једначине*, *неједначине* и *идеја функције* (Прилог 1). Садржаји су прилагођени према наставном плану и програму за четврти разред основне школе. Тест је реализован у четвртом разреду пре увођења експерименталног програма, где смо на основу добијених резултата разматрали да ли је потребно извршити уједначавање група, тестирањем значајности разлике међу аритметичким срединама Е и К групе. Задаци су вредновани по кључу, према коме је максимално могући број остварених поена износио 35.

Иницијалним тестом дошли смо до следећих података:

1. Колико су ученици четвртог разреда основне школе успешни у решавању једноставних једначина и неједначина применом поступка моделовања и иконичког представљања?
2. Колико су ученици четвртог разреда основне школе оспособљени да решавају сложене једначине и неједначине применом поступка моделовања?
3. Колико су ученици оспособљени за састављање текстуалних задатака на основу задатих иконичких и симболичких представа?
4. Колико је код ученика четвртог разреда основне школе развијена способност примене и разумевања математичког моделовања при решавању задатака изван тематских области једначине и неједначине?

У оквиру иницијалног теста конструисали смо задатке који су нам помогли да добијемо одговоре на претходно наведена питања.

- Први, други, трећи, девети (односе се на решавање једноставних једначина) четврти и пети (односе се на решавање једноставних неједначина) задатак помогли су нам да добијемо одговор на питање какве су способности моделовања ученика у решавању једноставних једначина и неједначина.
- У првом, другом и петом задатку ученици су требали да реше задате једноставне једначине и неједначине, те да на основу симболичких записа допуне слике, односно да дате симболичке записе представе сликом.
- Трећи и девети задатак захтевају од ученика да реагују симболичким записом на задате једноставне текстуалне проблеме (који представљају опис практичних реалних ситуација које су блиске ученицима), док четврти задатак захтева решавање задате неједначине једноставном математичком процедуром.
- Седми и десети (текстуална структура геометријског карактера) задатак односе се на решавање сложених једначина, док се осми односи на решавање сложене неједначине.
- Шести задатак подразумева активност превођења информације из иконичког у симболичко окружење. Ученици треба симболички да представе једначину задату у виду слике, те да саставе текст који одговара датој ситуацији.
- Једанаести задатак (односи се на идеју функције) испитује способност ученика да на основу иконичке представе (табеле) изведу закључак, те да запишу одговарајући израз (симболичку структуру) који је оличење представљене табеле. На основу овог задатака видећемо колико су ученици способни да посредством математичког моделовања решавају задатке изван тематских области једначине и неједначине.

Табела 13. Резултати на иницијалном тесту

Способност математи- чког моделовња.	Једноставне једначине и неједначине					Саста- вљање текстуа- лних задатака	Сложене једначине и неједначине				Друге тема- тске области	Укупно
Задатак	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	
Експериме- нтална група	244	96	91	76	53	74	73	46	67	15	1	
	560					74	201				1	836
Контролна група	248	89	88	104	47	69	79	54	73	9	1	
	576					69	215				1	861

Посматрајући резултате (Табела 13) експерименталне и контролне групе на иницијалном тесту јасно је уочљива мала разлика у укупном броју остварених поена. Ученици експерименталне групе остварили су укупно 836 поена, док су ученици контролне групе остварили 861 поен.

С обзиром на задатке који су чинили садржај иницијалног теста истаћемо да је контролна група била успешнија приликом решавања једноставних и сложених једначина и неједначина с обзиром на експерименталну групу. Дакле приликом решавања једноставних једначина и неједначина (1, 2, 3, 4 и 5. задатак) контролна група је остварила 576 поена, а експериментална 560 поена. Задаци који су захтевали решавање сложених једначина и неједначина (7, 8, 9 и 10. задатак) оставрени поени такође су били у корист контролне групе која је остварила 215 поена, док је експериментална група остварила 201 поен. Иницијални тест садржао је и задатак (6. задатак) који је захтевао од ученика да на основу одређених иконичких и симболичких представа саставе одговарајући текст, у том задатку експериментална група остварила је 74 поена, а контролна 69 поена. Најслабији резултат обе групе ученика постигле су у задатку који је био изван тематских области једначине и неједначине, тачније у задатку који је био у вези са идејом функције (11. задатак). У том задатку обе групе оствариле су по 1 поен.

Разлике у укупном броју поена које су ученици постигли на иницијалном мерењу графички смо представили на Слици 28.



Слика 28. Број освојених поена на иницијалном тесту по категорији задатака

На основу представљеног графика јасно је уочљиво да су разлике успеха експерименталне и контролне групе на иницијалном тесту посматрно кроз врсту задатака врло мале. Највећа разлика испољена је у задацима који су се односили на решавање једноставних једначина и неједначина.

Табела 14. Разлике између експерименталне и контролне групе на иницијалном тесту

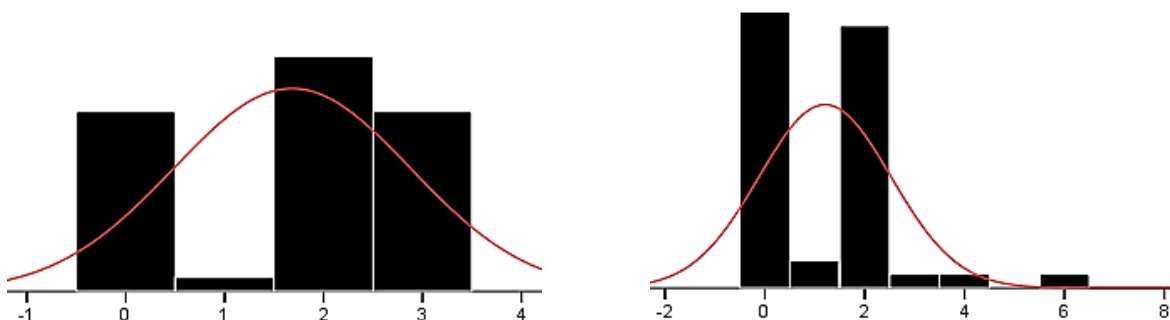
Варијабле	Експериментална група N=44		Контролна група N=44		U	p	F	p
	AS	S	AS	S				
Једноставне једначине и неједначине	14,27	3,34	14,66	3,26	875,0	,43	,30	,58
Сложене једначине и неједначине	3,07	1,80	3,25	1,69	912,5	,64	,24	,63
Састављање текста на основу иконичких и симболичких представа	1,68	1,19	1,57	1,11	897,0	,53	,21	,64
Друге тематске области	,02	,151	,02	,151	968,00	1,00	,00	1,00
Иницијални тест	19,05	5,14	19,50	4,59	912,5	,64	,19	,66

Легенда: U – вредност Mann Whitney U теста; F – вредност теста униваријантне анализе варијансе; p – статистичка значајност F/U теста; - делови који се узимају у обзир.

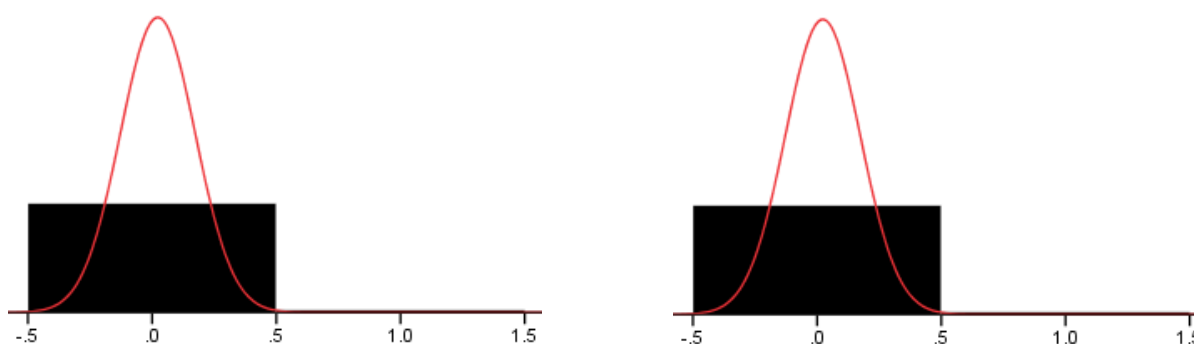
При поређењу укупног скорa на иницијалном тесту између Е и К групе коришћена је анализа варијансе (ANOVA), док смо за сваку посебну варијаблу посматрали вредности Mann Whitney U теста и његову значајност. За сваку од посебних варијабли разлике између контролне и експерименталне групе нису статистички значајне јер је $p > 0,05$ (Табела 14). Разлике између експерименталне и контролне групе на иницијалним тесту с обзиром на укупан скор такође нису статистички значајне јер је $p > 0,05$. Самим тим потврђена је прва хипотеза овог истраживања, а то је да не постоје значајне разлике између ученика експерименталне и контролне групе у постизању успеха израженим резултатом на иницијалном тесту. Разлике између експерименталне и контролне групе с обзиром на сваки задатак појединачно на иницијалном тесту приказане су у Табели 15.

Табела 15. Разлике између експерименталне и контролне групе на иницијалном тесту с обзиром на сваки задатак

Варијабле	Експериментална група N=44		Контролна група N=44		U	p
	AS	S	AS	S		
Задатак 1	5,55	,87	5,64	,81	924	,60
Задатак 2	2,18	,40	2,02	,66	892	,37



Слика 31. Састављање текста на основу иконичких и симболичких представа



Слика 32. Друге тематске области (идеја функције)

Највише потешкоћа на иницијалном тесту ученици експерименталне и контролне групе имали су приликом: (а) представљања симболичког записа адекватном иконичком представом; (б) решавања неједначине уз помоћ табеле; (в) састављања одговарајућег текста на основу иконичких и симболичких представа и (г) уочавања правила на основу кога је попуњена одређена табела која је била одраз идеје функције. Да бисмо потврдили претходно речено уз помоћ следеће табеле јасно се може видети успешност решавања задатака од стране ученика по наведеним поткатегоријама.

Табела 16. Проценат ученика који су успешно решили задатке по наведеним поткатегоријама на иницијалном тесту

		Превођење симболичког записа у иконички		Решавање неједначине уз помоћ табеле		Састављање текста на основу иконичких и симболичких представа	Извођење закључака (идеја функције)
N		i2a ₃	i10a ₃	i5a ₃	i5b ₃	i6a ₅	i11a ₆
Е група	44	18,18%	9,09%	29,55%	22,73%	31,82%	2,27%
К група	44	13,64%	6,82%	20,45%	15,91%	22,73%	2,27%

Увидом у Табелу 16 види се да је од укупно 44 ученика експерименталне групе само 18,18% (8 ученика) успешно успело самостално иконички да представи симболички задату једноставну једначину ($i2a_3$ / иницијани тест, 2. задатак под а, где број 3 у индексу чини код који се односи на слику/иконичку представу). Слична ситуација је и са ученицима из контролне групе где је од такође укупно 44 ученика овај проблем успешно решило 13,64% (6 ученика). Проценат успешности је знатно мањи када је било потребно сложу једначину ($i10a_3$) такође представити иконички, у том случају само 9,09% (4 ученика) експерименталне групе, односно 6,82% (3 ученика) је успешно дошло до исправног решења. Када је у питању решавање неједначина ($i5a_3$) уз помоћ постављене табеле ученици се такође нису снашли, те је једноставну неједначину уз помоћ табеле исправно решило 29,55% (13 ученика) експерименталне, односно 20,45% (9 ученика) контролне групе. Пример једноставне неједначине ($i5b_3$) у којој је непозната компонента био умањилац код ученика је изазвао додатне проблеме јер су ученици занемарили чињеницу да не могу од мањег одузети већи број. Овај задатак успешно је решило 22,73% (10 ученика) експерименталне, односно 15,91% (7 ученика) контролне групе.

Приликом састављања текста на основу иконичких и симболичких представа ($i6a_5$) ученици четвртог разреда основне школе такође су показали извесне потешкоће јер су углавном писали текстове који нису релевантни симболичком или иконичком запису, с тим у вези овај задатак је успешно решило 31,82% (14 ученика) контролне и 22,73% (10 ученика) експерименталне групе. Када је било потребно извести закључак и утврдити правило на основу које је била попуњена дата табела ($i11a_6$) која је оличење идеје функције, ученици су показали изузетан неуспех јер је само 2,27%, односно по 1 ученик у обе групе успео да дође до исправног одговора. Мишљења смо да су ученици исказали потешкоће у наведеним поткатегоријама задатака, јер нису имали адекватно развијену способност математичког моделовања, или се раније нису сусретали са иконичким представама једначина, неједначина и идеје функције. Јасно је да ученици нису успели да изврше трансформацију симболичких једнакости и неједнакости у иконичке, али и да чак нису путем своје визуелне интуиције успели да објасне и разумеју представљене схеме и табеле већ су тежили симболичким записима. Да ли се ситуација променила након примене модела проблемске наставе на часу математике видећемо кроз текст који тек следи.

2. Анализа резултата I финалног теста

Након иницијалног мерења у експерименталну групу уведен је експериментални програм, након кога је спроведено прво финално мерење. Резултати са првог финалног теста с обзиром на број поена који су оствариле експериментална и контролна група представљени су у Табели 6. Први финални тест садржао је 10 задатака у оквиру којих су се налазили садржаји у вези са решавањем једначина и неједначина предвиђени планом и програмом за четврти разред основне школе (Прилог 2). У оквиру I финалног теста налазе се две тематске целине: 1) једначине (5 задатака) и 2) неједначине (5 задатака). Тест је реализован након завршетка експерименталног програма. Задаци су вредновани по кључу, где је максимално могући број остварених поена био 40.

- Први задатак одговара (паралелна верзија) задатку који се односи на решавање једноставних једначина на иницијалном тесту. Други, трећи и пети (односе се на решавање једноставних неједначина) задатак заснивају се на текстуалним проблемима из свакодневног живота на које ученици треба да реагују симболичким записом у виду једноставне неједначине.
- Седми, осми, девети и десети односе се на решавање сложених једначина и неједначина.
- Четврти (једноставна неједначина) и шести (сложена једначина) задатак захтевају од ученика да иконичку представу преточе најпре у симболичку (симболички запис), реше једначину/неједначину, а потом и да саставе текст у складу са ситуацијом.

Табела 17. Резултати на I финалном тесту

Способност математи- чког моделовња	Једноставне једначине и неједначине				Састављање текстуалних задатака		Сложене једначине и неједначине				Укупно
Задатак	1.	2.	3.	5.	4.	6.	7.	8.	9.	10.	
Експериме- нтална група	241	208	149	143	130	106	99	112	59	119	
	741				236		389				1366
Контролна група	175	70	85	63	11	37	47	73	0	8	
	393				48		128				569

Као што се види у Табели 17 на првом финалном мерењу експериментална група ставрила је 1366 поена, што је за 500 поена више у односу на иницијално мерење, док је контролна група остварила 569 поена, што је за 292 поена мање него што је остварила на иницијалном мерењу.

Разлике у постигнутом успеху између експерименталне и контролне групе на првом финалном мерењу су евидентне, где експериментална група показује изразит напредак како у односу на иницијално мерење тако и у односу на контролну групу у првом финалном мерењу, док контролна група показује изванредан пад с обзиром на своје иницијално стање и драстичан пад у односу на групу у којој је био уведен експериментални програм (Слика 33).



Слика 33. Број освојених поена на I финалном тесту с обзиром на категорију задатака

Приликом решавања једноставних једначина и неједначина (1, 2, 3 и 5. задатак) експериментална група остварила је 741 поен, док је контролна група остварила 393 поена на I финалном тесту. При решавању сложених једначина и неједначина (7, 8, 9 и 10. задатак) експериментална група је такође показала велики напредак кроз остварених 389 поена, у односу на контролну групу која је достигла само 128 поена.

При развоју способности одговорних за састављање текста на основу задатих икониичких и симболичких представа (4 и 6. задатак) група која је била под утицајем модела (експерименталног програма) показала је већи успех у постигнутим поенима у односу на контролну групу, дакле експериментална група остварила је 236 поена док је контролна остварила 48 поена.

Наредна табела (Табела 18) однос између експерименталне и контролне групе након првог финалног мерења.

Табела 18. Основни дескриптивни статистици варијабли на првом финалном мерењу експерименталне и контролне групе

Варијабле		AS	S	MIN	MAX	SKJ	KUR	KV	KS
Експериментална група	Једноставне једначине и неједначине	16,73	2,98	7	20	-1,44	1,96	17,8	,00
	Сложене једначине и неједначине	7,91	2,51	2	12	-,19	-,85	31,8	,20
	Састављање текста на основу икониичких и симболичких представа	1,52	1,52	0	7	-1,07	1,84	29,2	,00
	I финални тест	30,09	5,74	14	38	-1,08	1,05	19,1	,06

Контролна група	Једноставне једначине и неједначине	8,84	3,37	2	16	-,21	-,56	38,1	,04
	Сложене једначине и неједначине	1,202	2,04	0	7	-,12	-1,24	70,6	,00
	Састављање текста на основу икониичких и симболичких представа	1,20	1,32	0	6	1,19	2,47	109,8	,00
	I финални тест	12,95	5,87	3	24	-,25	-1,04	45,3	,14

Све претходно наведено индикувало је појаву повишених вредности коефицијента варијације, а индиректно и самог одступања од нормалне дистрибуције. Резултати Колмогоров-Смирнов теста код експерименталне групе указали су на постојање одступања од нормалне дистрибуције у две варијабле, док је код контролне групе одступање уочено у три варијабле. Оваква ситуација показује да се за утврђивање разлика у варијаблама једноставне једначине и неједначине, сложене једначине и неједначине као и састављање текста на основу икониичких и симболичких представа, мора користити непараметријска метода за утврђивање разлика између две групе, док је у варијабли I финални тест било могуће разлике добити и параметријском техником.

Табела 19. Разлике између експерименталне и контролне групе након првог финалног мерења

Варијабле	Експериментална група N=44		Контролна група N=44		U	p	F	p
	AS	S	AS	S				
Једноставне једначине и неједначине	16,73	2,98	8,84	1,32	96,00	,00	135,47	,00
Сложене једначине и неједначине	7,91	2,51	2,89	3,37	113,50	,00	106,05	,00
Састављање текста на основу икониичких и симболичких представа	5,20	1,52	1,20	2,04	81,00	,00	173,66	,00
I финални тест	30,09	5,74	12,95	5,87	61,00	,00	191,61	,00

Резултати који су добијени Анализом варијансе (ANOVA) и путем Mann-Whitney-евог U теста приказани су у Табели 19 и показују да постоје статистички значајне разлике између експерименталне и контролне групе у свим варијаблама на I финалном мерењу. Дакле, након спровођења Модела (проблемске наставе) на задацима који обухватају једноставне и сложене једначине и неједначине као и састављање текста на основу икониичких и симболички представа долази се до закључка да су разлике између Е и К групе статистички значајне на нивоу 0,05. Односно, статистичка значајност $p=0,00$ што је мање од 0,05. Добијене разлике биле су у корист експерименталне групе.

Ради комплетније анализе и потпунијег сагледавања разлика између контролне и експерименталне групе у даљем тексту указаћемо на те разлике с обзиром на сваки задатак истраживања појединачно.

2.1. Решавање једноставних једначина и неједначина

На првом финалном мерењу ученици су решавали једноставне једначине и неједначине (1, 2, 3 и 5. задатак), резултати су показали да су ученици који су били подвргнути експерименталном програму остварили знатно већи успех у односу на ученике контролне групе који су радили на уобичајен (устаљен) начин.

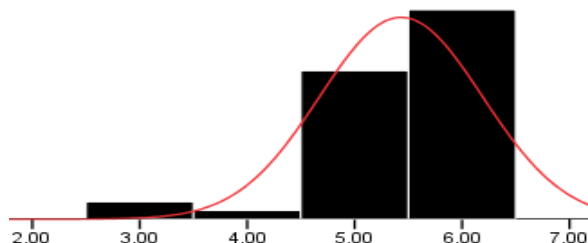
Табела 20. Разлике између експерименталне и контролне групе у задацима који представљају једноставне једначине и неједначине

Варијабле	Експериментална група N=44		Контролна група N=44		U	p
	AS	S	AS	S		
Задатак 1	5,43	,76	3,89	,76	110,50	,00
Задатак 2	4,68	1,34	1,57	1,34	112,50	,00
Задатак 3	3,39	1,26	1,91	1,26	388,50	,00
Задатак 5	2,32	,67	,23	,67	119,00	,00

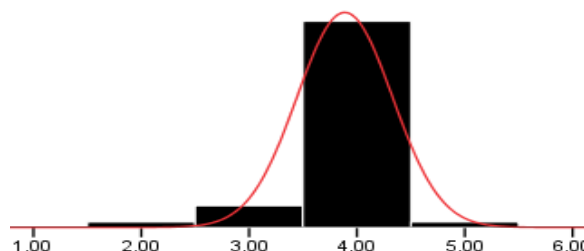
Анализом резултата уз помоћ Mann-Whitney-евог U теста у Табели 20 долази се до закључка да постоје статистички значајне разлике на нивоу 0,05 између експерименталне и контролне групе у свим варијаблама ($p=0,00$). Добијене разлике су у корист експерименталне групе која је показала веће знање, а самим тим и виши ниво способности математичког моделовања при решавању једноставних једначина и неједначина. С тим у вези потврђена је друга постављена хипотеза која говори о томе да реализација проблемске наставе (увођење експерименталног програма) у великој мери утиче на развој способности математичког моделовања код ученика четвртог разреда основне школе, приликом решавања једноставних једначина и неједначина. Да бисмо употпунили и оправдали досадашње тврдње кроз наредне слике које су одраз графикона биће приказана дистрибуција варијабли по задацима који представљају једноставне једначине и неједначине.

Дистрибуција варијабли по задацима који представљају једноставне једначине и неједначине.

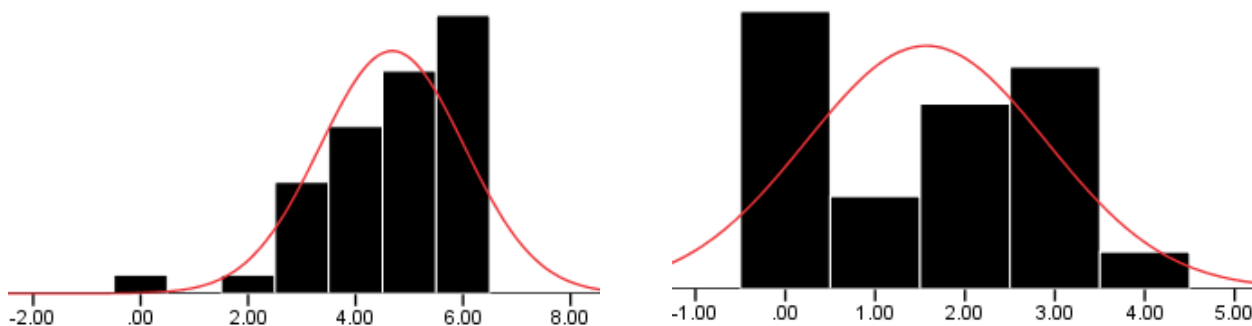
(а)



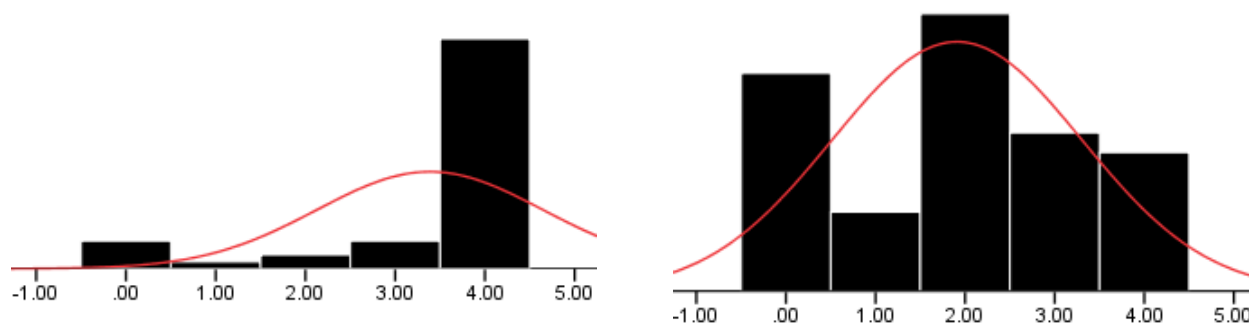
(б)



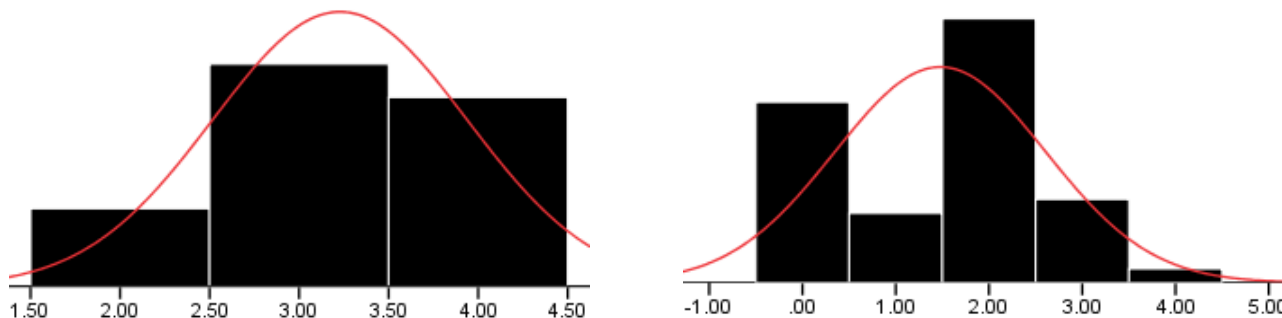
Слика 34. Хистограми расподеле успеха (а) експерименталне и (б) контролне групе у 1. задатку



Слика 35. Хистограми расподеле успеха експерименталне и контролне групе у 2. задатку



Слика 36. Хистограми расподеле успеха експерименталне и контролне групе у 3. задатку



Слика 37. Хистограми расподеле успеха експерименталне и контролне групе у 5. задатку

На иницијалном тесту у оквиру категорије једноставне једначине и неједначине експериментална група остварила је 560 поена, док је контролна група остварила 576 поена. На првом финалном мерењу експериментална група у оквиру исте категорије достигла је 741 поен, што је за 181 поен више у односу на почетно стање, док је контролна група остварила пад у резултату и остварила 393 поена, што је за 183 поена мање у односу на почетно стање.

Приликом анализе иницијалног теста упознали смо се са одређеним поткатегијама у задацима у којима се ученици ни Е ни К групе нису снашли. На првом финалном тесту задаци $f1a_3$ и $f1b_3$ паралелна су верзија задатка $i2a_3$ који су ученици решавали на иницијалном тесту и односили су се на решавање једноставних једначина где је било потребно задате једначине представити иконички. Да је примена уведеног Модела била од великог значаја за постизање успеха ученика експерименталне групе потврдиће нам наредна табела.

Табела 21. Успешност Е и К групе приликом иконичког приказа једноставних једначина на првом финалном тесту

Иконички приказ једноставних једначина			
N		f1a ₃	f1b ₃
Е група	44	97,72%	56,82%
К група	44	4,54%	0%

Од 44 ученика Е групе која је била под утицајем Модела једноставну једначину облика $x - 430 = 2350$ (f1a₃/ финални тест, 1. задатак под а, који се односио на скицирање слике-бр.3 у индексу) је успешно иконички приказало 97,72% (43) ученика, док је у К групи која није била под утицајем Модела успешност износила 4,54% (2) ученика. Другу једноставну једначину облика $560 : x = 70$ успешно је путем слике приказало 56,82% (25) ученика из Е групе и ниједан ученик из К групе. Такође видимо да су се ученици Е групе генерално боље снашли са иконичком представом једначине која је била у вези са сабирањем и одузимањем у односу на једначину која је била у вези са множењем и дељењем. Штавише јасно је да је експериментална група била изразито успешнија од контролне, што оправдава чињеницу да су ученици уз помоћ уведеног Модела успели да преброде тешкоће са којима су се сусретали на иницијалном тесту у задатку са истим захтевом. Мишљења смо да се ниска успешност ученика К групе полази од ситуације да се ученици једноставно нису сусрели са иконичким приказима једначина, али и да немају довољно или никако развијену способност математичког моделовања.

Такође један од задатака који се за ученике обе групе испоставио као тежак на иницијалном тесту био је решавање неједначине уз помоћ табеле. Каква је ситуација након уведеног Модела видећемо у наредној табели.

Табела 22. Успешност ученика Е и К групе у решавању неједначине путем табеле

Решавање неједначине уз помоћ табеле		
N		f2a ₃
Е група	44	97,72%
К група	44	0%

Неједначину облика $25 \cdot x < 200$ успешно је уз помоћ табеле решило 97,72% (43) ученика Е групе, док из К групе табелу није успео да попуни ни један ученик. Опет се сусрећемо са чињеницом да је Е група показала велико интересовање за Модел који је уведен и тако показала своју високу успешност приликом савладавања проблема са којим се сусрела на иницијалном тесту. С друге стране ученици К групе једноставно су занемаривали табелу и дату неједначину су решавали на уобичајен начин користећи знање у вези са изражавањем непознатих компоненти.

Табела 23. Успешност ученика Е и К групе у транспоновању једноставне неједначине из иконицке у симболичку форму

Превођење иконицке представе неједначине у симболичку		
N		f4a ₁
Е група	44	97,72%
К група	44	9,09%

Као што табела показује ученици контролне групе на првом финалном мерењу нису успели једноставну неједначину која је дата иконицки успешно да преведу у симболички запис, а самим тим нису ни успели да је реше. Од 44 ученика контролне групе само је 9,09% (4) ученика успело да правилно запише постављену неједначину симболички и реши је. За разлику од контролне групе експериментална група која је била под утицајем Модела овај захтев је успешно решила, дакле од 44 ученика 97,72% (43) ученика је исправно превело постављену неједначину из иконицке форме у симболичку. Проценатуална разлика између контролне и експерименталне групе је заиста велика што опет потврђује чињеницу високе ефикасности проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања.

2.2. Решавање сложених једначина и неједначина

Садржај првог финалног мерења чиниле су и сложене једначине и неједначине. Такви задаци (7, 8, 9 и 10. задатак) захтевали су од ученика да уз помоћ способности математичког моделовања креирању стратегију, конципирају алгоритам и изнађу њихова тачна решења.

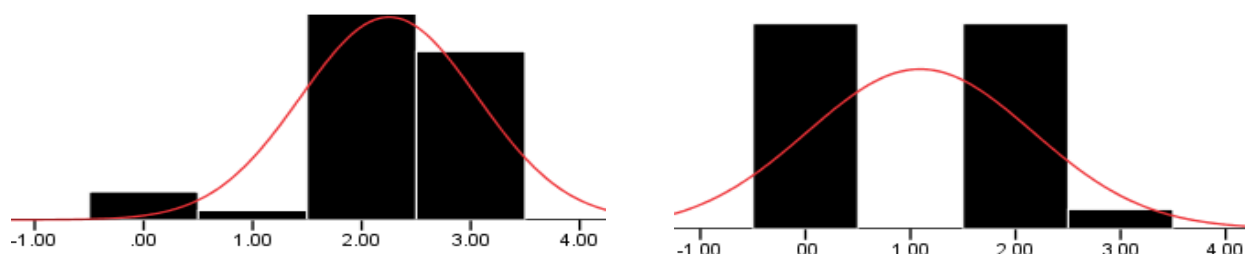
Табела 24. Разлике између експерименталне и контролне групе у задацима који представљају сложене једначине и неједначине

Варијабле	Експериментална група N=44		Контролна група N=44			
	AS	S	AS	S	U	p
Задатак 7	2,25	,81	1,09	,81	416,50	,00
Задатак 8	2,52	,85	1,68	,85	564,00	,00
Задатак 9	1,20	1,39	,00	1,40	506,00	,00
Задатак 10	2,70	,95	,18	,95	77,00	,00

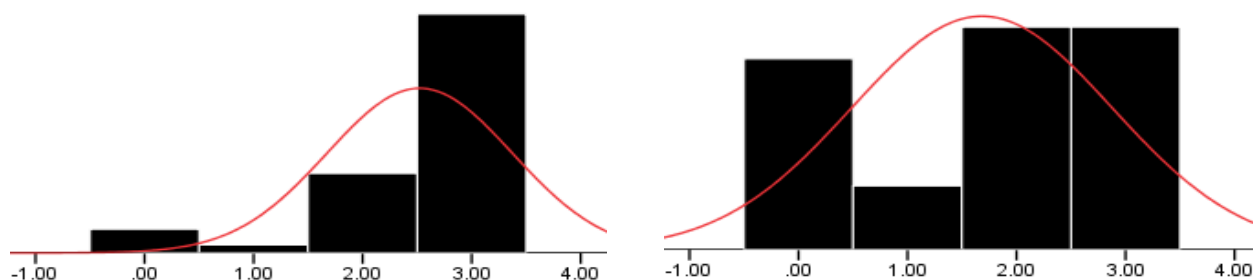
Анализом разлика путем Mann-Whitney-евог U теста између експерименталне и контролне групе у задацима који представљају сложене једначине и неједначине (Табела 24) долази се до закључка да статистички значајне разлике постоје јер је у свакој варијабли $p=0,00$ (односно $p<0,05$). Те разлике иду у корист експерименталне групе која је показала веће знање, односно већи ниво развијене способности математичког моделовања при решавању сложених једначина и неједначина након првог примењеног третмана.

Највеће разлике између контролне и експерименталне групе руководећи се аритметичком средином изражене су у десетом задатку чије је решење захтевало примену способности математичког моделовања. Ученици Е групе постигли су знатно бољи резултат ($AS=2,70$) од ученика К групе ($AS=0,18$) и тиме остварили највећу разлику у резултату посматрајући задатке појединачно. С тим у вези потврдићемо трећу постављену хипотезу овог истраживања тј. да ученици експерименталног програма (након увођења модела-проблемске наставе) без потешкоћа решавају сложене једначине и неједначине применом математичког моделовања.

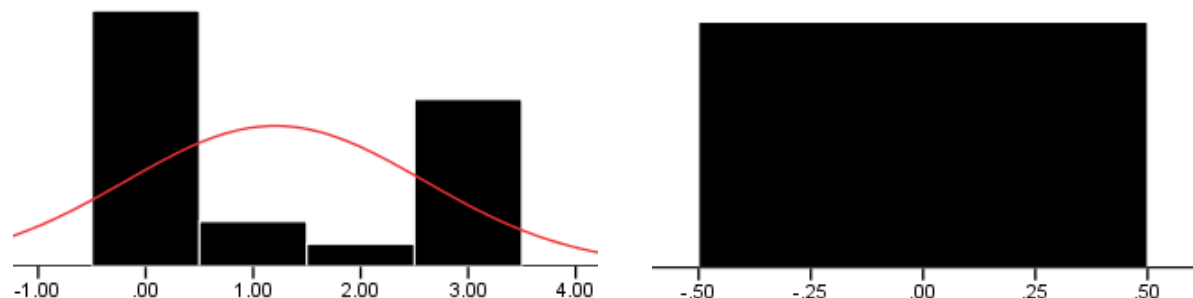
Да бисмо наведено оправдали, следи графички приказ дистрибуција варијабли по задацима који су одраз сложених једначина и неједначина.



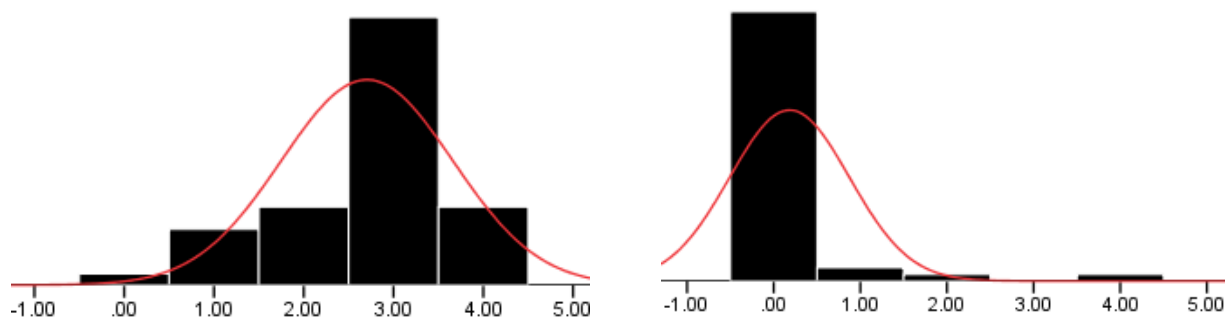
Слика 38. Хистограми расподеле успеха експерименталне и контролне групе у 7. задатку



Слика 39. Хистограми расподеле успеха експерименталне и контролне групе у 8. задатку



Слика 40. Хистограми расподеле успеха експерименталне и контролне групе у 9. задатку



Слика 41. Хистограми расподеле успеха експерименталне и контролне групе у 10. задатку

Након првог финалног мерења навели дошли смо да закључка да су ученици експерименталне групе достигли знатно боље резултате у односу на ученике контролне групе, што значи да је експериментални програм тј. проблемска настава, успешно деловала на развој способности математичког моделовања код ученика експерименталне групе.

С обзиром да је на иницијалном тесту експериментална група остварила укупно 201 поен, а контролна 215 поена у категорији сложених једначина и неједначина, резултат после првог финалног мерења показао је велики успех експерименталне групе. На првом финалном тесту експериментална група остварила је 389 поена, а контролна 128, што показује да је експериментална група свој број поена побољшала за 288, а контролна група је назадовала и остварила за 87 поена мање у односу на иницијални тест. Према нашем мишљењу овакав резултат је добијен из разлога што ученици контролне групе нису имали довољно искуства када је у питању математичко моделовање.

Приликом решавања задатака у вези са сложеним једначинама раније смо говорили о томе да су ученици Е и К групе имали извесних потешкоћа приликом њиховог иконичког представљања, потом смо увели Модел у експерименталну групу у жељи да сазнамо да ли ће се тадашња ситуација променити, с тим у вези кроз наредни текст видећемо да ли су и у којој мери ученици развили способност математичког моделовања и колико су успешно могли да транспонују једначине из иконичког оквира у симболички.

Табела 25. Успешност ученика Е и К групе у транспоновању сложених једначина из иконичке форме у симболичку

Транспоновање сложених једначина из иконичке у симболичку форму					
	N	f6a ₁	f9a ₁	f10a ₁	f10a ₃
Е група	44	95,45%	45,45%	77,27%	88,64%
К група	44	45,45%	0%	6,82%	2,27%

Део 6. задатка (f6a₁) са првог финалног теста од ученика је захтевао да сложену једначину која је задата у иконичком облику преведу у симболички облик, као што Табела 25 показује ученици Е групе су били изузетно успешнији с обзиром на ученике К групе.

Од 44 ученика Е групе 95,45% (42) ученика је успешно путем своје визуелне интуиције извршило транспоновање сложене једначине из иконичке у симболичку форму а потом је и решило, ученици К групе одступају од ученика Е групе и њихова успешност је износила 45,45% односно 20 ученика је успело да испуни задати захтев. Девети задатак (f9a₁) такође је од ученика захтевао да на основу дате реалистичне ситуације и слике састави адекватну једначину у симболичком облику. С тим у вези 45,45% (20) ученика Е групе је успешно извршило захтев, док се ученици из К групе нису снашли, односно није постојао ниједан ученик који је исправно исти захтев испунио. Десети задатак (f10a_{1,3}) са првог финалног теста такође је на основу дате реалистичне ситуације захтевао од ученика да постављену слику најпре допуне, а потом на основу исте да саставе адекватну једначину и наравно реше је. Ученици Е групе који су били под утицајем Модела оправдали су његову ефикасност, јер је од укупно 44 ученика 77,27% (34 ученика) правилно поставило једначину, односно 88,64% (39) ученика је успешно допунило дату слику. Посматрајући добијени резултат поставља се питање како је 5 ученика Е групе исправно допунило слику, а није испрвно записало једначину? Одговор на то питање може бити следећи: Ученици су једноставно врло лако допунили слику и на основу слике су одмах дошли до исправног решења без постављања једначине, захтев за симболички запис једначине су занемарили, међутим крајњи одговор и решење били су тачни.

Ситуација код групе (К) која није била под утицајем Модела била је много другачија с обзиром на Е групу, јер је такође од 44 ученика 6,82% (3) исправно записало симболички запис једначине, а само 2,27% (1 ученик) је успешно допунило задату слику. Код К групе 2 ученика су једначину исправно симболички представили на основу постављене реалистичне ситуације занемарујући слику у потпуности и тако дошли до њеног решења.

2.3. Састављање текста задатка на основу иконичких и симболичких представа

У оквиру I финалног тестирања два задатака (4. и 6. задатак) су захтевали од ученика да њихову иконичку и симболичку представу употпуне релевантним текстом. Заправо, желели смо да истражимо колико развој способности математичког моделовања под утицајем проблемске наставе (експерименталног фактора) може помоћи ученицима да осмисле адекватан текст с обзиром на задате иконичке и симболичке представе.

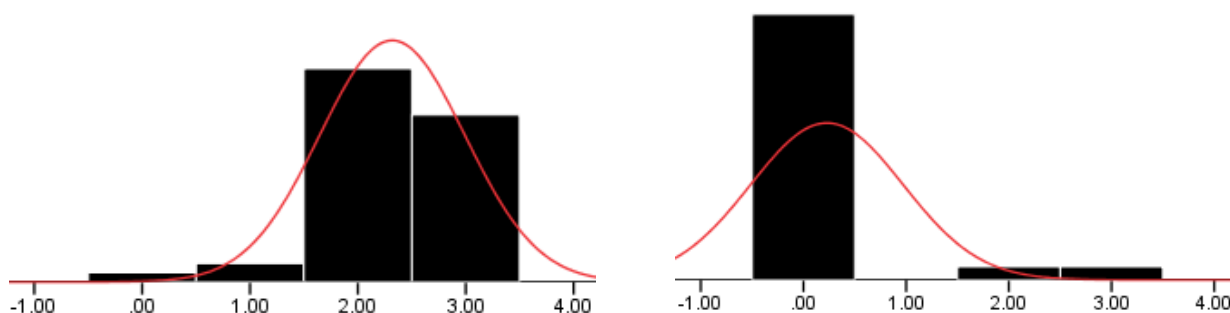
Резултати који су добијени након првог финалног мерења указују на чињеницу да је експериментална група показала знатно већи успех у односу на контролну групу. О томе нам сведочи нредна табела (Табела 26).

Табела 26. Разлике између експерименталне и контролне групе у задацима који представљају састављање текста на основу иконичких и симболичких представа

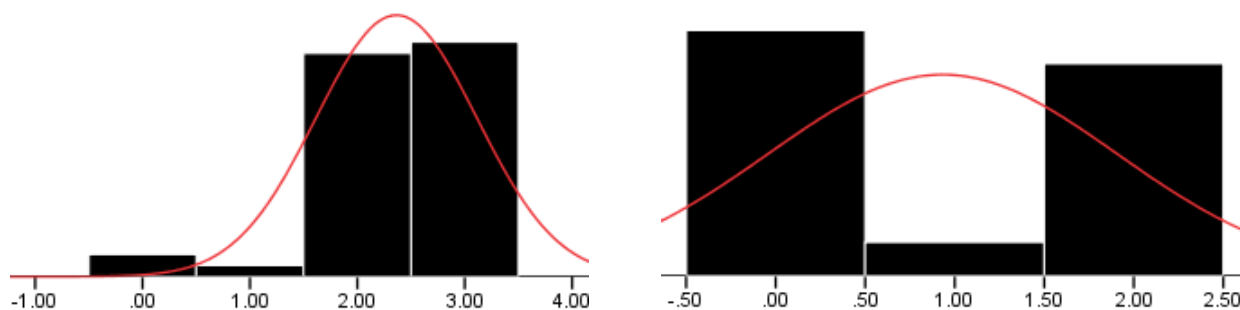
Варијабле	Експериментална група N=44		Контролна група N=44		U	p
	AS	S	AS	S		
Задатак 4	3,23	,71	1,48	,71	204,00	,00
Задатак 6	2,36	,75	,93	,75	276,50	,00

Резултати приказани у Табели 26 указују на постојање статистички значајних разлика између експерименталне и контролне групе у свим варијаблама односно задацима који представљају састављање текста на основу иконичких и симболичких представа. Добијене разлике су у корист експерименталне групе која је имала већу просечну вредност у односу на контролну групу. Извршавањем анализе уз помоћ Mann-Whitney-евог U теста дошли смо до сазнања да статистичка значајност износи 0,00 ($p=0,00$) у свакој варијабли што потврђује претходно речено.

На основу свега реченог потврђујемо и четврту постављену хипотезу, а то је да су ученици из експерименталне групе показали знатно већи успех у односу на ученике из контролне групе приликом састављања текстуалних задатака у вези са једначинама и неједначинама на основу задатих иконичких и симболичких представа. Како бисмо остварили увид у дистрибуцију сваког задатака појединачно, а самим тим и оправдали претходне тврдње следећи хистограми ће нам помоћи у томе.



Слика 42. Хистограми расподеле успеха експерименталне и контролне групе у 4. задатку



Слика 43. Хистограми расподеле успеха експерименталне и контролне групе у 6. задатку

Током анализе и интерпретације резултата иницијалног теста једна од главних потешкоћа код ученика приликом решавања задатака управо се односила на састављање релевантног текста задатим иконичким и симболичким представама једначина.

На првом финалном тесту ученици су имали овај захтев у два задатака: задатак f4a₅ где је било потребно на основу иконицке представе неједначине најпре саставити неједначину о чему смо говорили раније у симболичком облику, а потом осмислити текст који је одликова и задатак f6a₅ где је било потребно на основу иконицке представе такође саставити симболичку форму једначине о чему смо говорили у претходном подпоглављу, а потом и саставити текстуални задатак који одговара датој слици (једначини). Резултати успешности ученика у решавању ових захтева на првом финалном тесту дати су кроз наредну табелу (Табела 27).

Табела 27 . Успешност ученика Е и К групе на првом финалном тесту у састављању текста који одговара иконицким и симболичким представама једначина/неједначина

Састављање текста који одговара иконицким и симболичким представама једначина/неједначина			
N		f4a ₅	f6a ₅
Е група	44	52,27%	50%
К група	44	2,27%	0%

Према резултатима из табеле види се да је од 44 ученика Е групе на првом финалном тесту иконицки задату једноставну неједначину (f4a₅, симболичког облика $2000 - n > 350$) успешно употпунило релевантним текстом 52,27% (23) ученика, док је из К групе то успело само 2,27%, односно 1 ученик. Састављање оговарајућег текста који одговара задатој сложеној једначини (f6a₅) такође је ученицима представљало проблем, те се јасно види да је успешност ученика Е групе 50% (22 ученика), док из К групе ниједан ученик није исправно саставио текст који би употпунио дату једначину (симболички облик $180 + 5 \cdot x = 1330$).

Разматрајући добијено видимо да је Е група знатно постигла боље резултате у односу на контролну групу у оба наведена случаја. Сматрамо да се и у овом случају Модел који смо применили код Е групе истакао и показао као врло ефикасан.

3. Анализа резултата II финалног теста

Други финални тест конструисан је да би се прикупили подаци о постојању трансфера учења на садржаје који су изван тематских области једначине и неједначине (Прилог 3). Тест чине четири задатка који укључују примену математичког моделовања. Задаци су вредновани по кључу, где је максимално могући број остварених поена био 12.

Када је реч о другом завршном тесту, концепција његових задатака изгледала је овако:

- Први и други задатак одраз су текстуалних проблема практичних животних ситуација које су блиске ученицима. Најпогоднији метод решавања ових задатака крије се у примени способности математичког моделовања, где су ученици путем одређене слике (графа или табеле) успешно решавали ове задатке.
- Трећи задатак односи се на бројевне низове које треба посматрати као увод у разумевање идеје функције. Ученици су на основу датих слика требали да изведу одређене закључке, те да запишу симболички израз који одговара датим сликама.

- Четврти задатак заснован је на откривању идеје функције, која је ткође саставни део плана и програма за четврти разред основне школе. У овом задатку ученици су изводили закључке, потом записивали одговарајуће симболичке изразе, те састављали текстуалне задатке који погодују изразу и иконичкој представи.

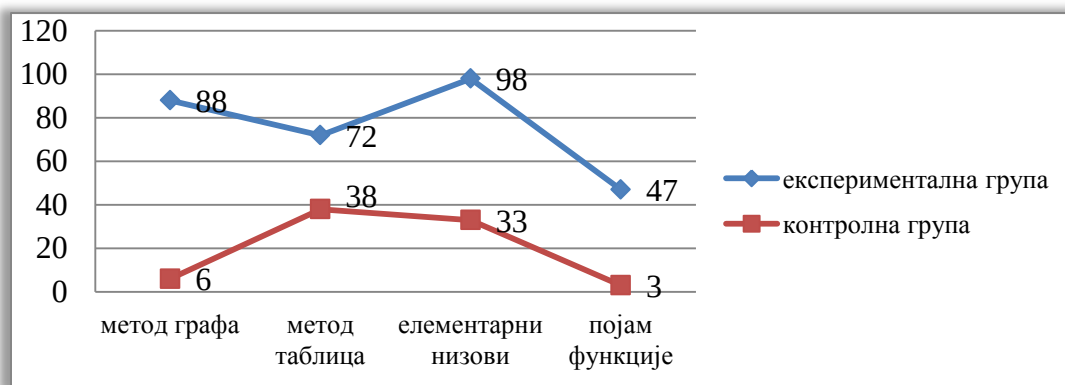
Садржаји који су наведени у другом завршном тесту нису обухваћени нашим моделом, они су нам послужили да испитамо колико досадашња искуства ученика могу помоћи у трансферу знања на области које су изван тематских оквира једначине и неједначине.

Табела 28. Резултати на II завршном тесту

Способност математичког моделовања.	Метод графа (схеме)	Метод таблица	Елементарни низови	Појам функције	Укупно
Задатак	1.	2.	3.	4.	
Експериментална група	88	72	98	47	305
Контролна група	6	38	33	3	80

Као што се види у Табели 28 група ученика која је била подвргнута експерименталном програму на другом завршном тесту којим се мерио трансфер знања остварила је 305 поена, док је контролна група достигла укупно 80 поена. Јасно је да је експериментална група постигла далеко већи успех у односу на контролну групу. У даљем тексту упознаћемо се са резултатима ученика који су постигли на другом завршном мерењу с обзиром на категорију задатака.

Трансфер знања ученика експерименталне и контролне групе на садржаје који су били изван тематских области једначина и неједначина показао се као адекватан у корист експерименталне групе (Слика 44). Резултати које су ученици остварили показују да је Е група била значајно успешнија од К групе, међутим највећа разлика у поенима испољила се у оквиру првог задатка са другог финалног теста који је најадекватније било решити уз помоћ цртања схеме (метод графа). Експериментална група остварила је 88 поена, док је контролна група остварила само 6 поена што показује разлику између Е и К групе од 82 поена која није занемарљива.



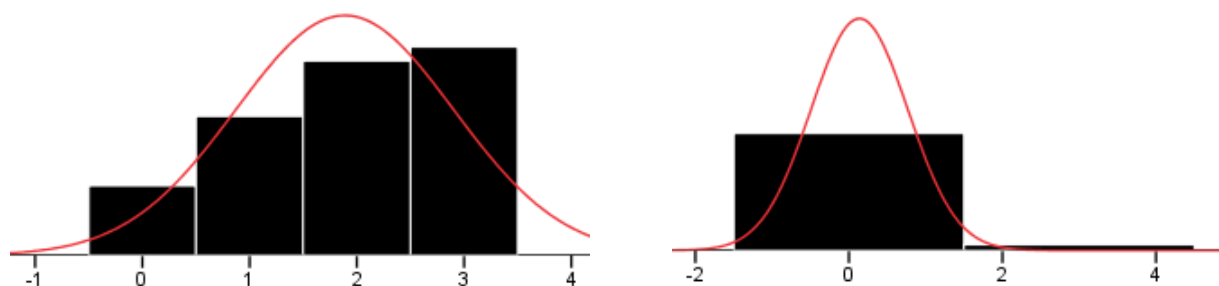
Слика 44. Број освојених поена на II финалном тесту с обзиром на категорију задатака

Увођење проблемске наставе у експерименталну групу указује на велику ефикасност овог модела у развоју способности математичког моделовања, јер су добијени резултати увек на страни групе која је била подвргнута експерименталном програму.

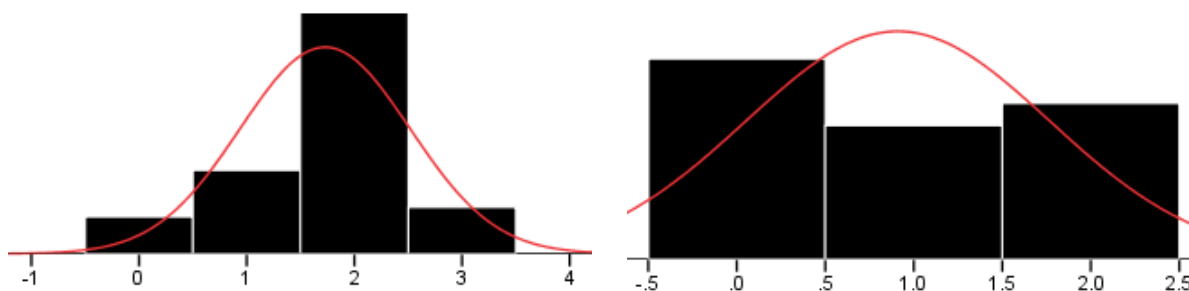
Табела 29. Разлике између експерименталне и контролне групе након другог финалног мерења

Варијабле	Експериментална група N=44		Контролна група N=44		U	p
	AS	S	AS	S		
Метод графа	1,89	1,02	,14	,63	178,0	,00
Метод таблица	1,73	,79	,91	,86	502,0	,00
Елементарни низови	2,30	1,07	,80	1,02	356,5	,00
Функције	1,11	1,04	,07	,45	407,5	,00
II финални тест	7,02	2,77	1,91	2,05	164,5	,00

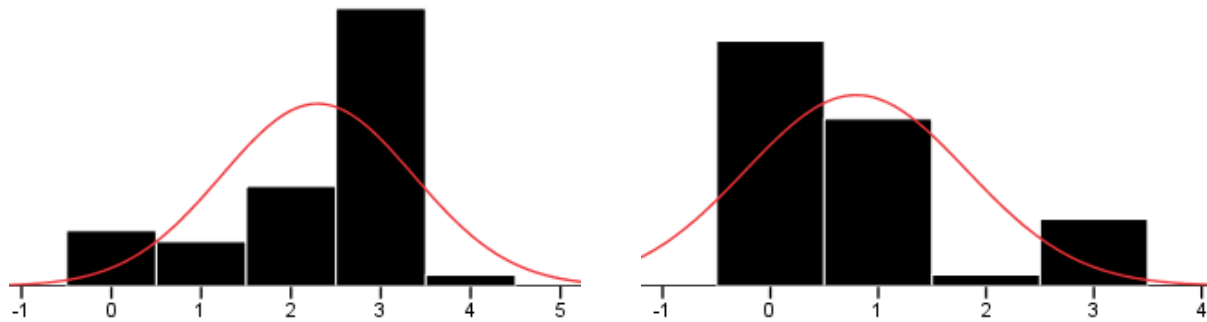
Резултати који су добијени помоћу Mann-Whitney-евог U теста након другог финалног теста приказани су у Табели 29 и показали су да постоје статистички значајне разлике између контролне и експерименталне групе на нивоу 0,05 у свим представљеним варијаблама ($p=0,00$). Разлике су у корист експерименталне групе која је показала веће знање које је у вези са развијеном способношћу моделовања при решавању задатака након другог примењеног третмана. Потпунију валидност ове анализе употпуниће и наредне слике у виду хистограма расподеле успеха експериментална и контролне групе након другог финалног мерења.



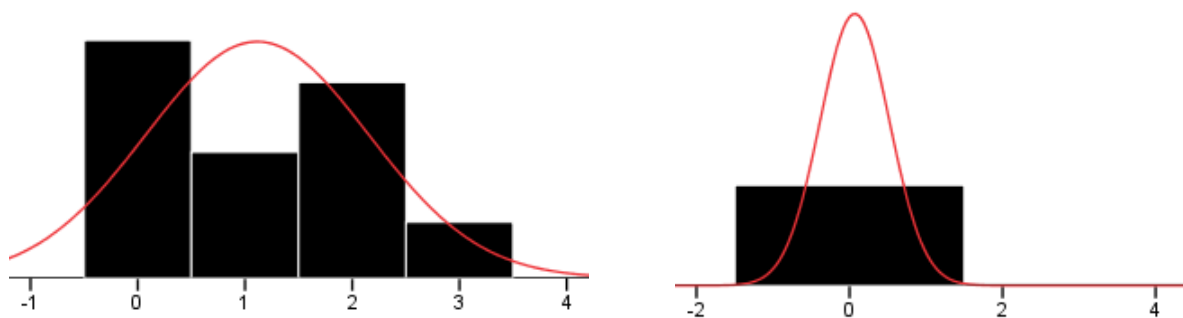
Слика 45. Хистограми расподеле успеха експерименталне и контролне групе у задатку који је могуће решити методом графа



Слика 46. Хистограми расподеле успеха експерименталне и контролне групе у задатку који је могуће решити методом таблице



Слика 47. Хистограми расподеле успеха експерименталне и контролне групе у задатку у вези са елементарним низовима



Слика 48. Хистограми расподеле успеха експерименталне и контролне групе у задатку у вези са идејом функције

С обзиром на добијене резултате можемо констатовати да је потврђена и пета хипотеза овог истраживања а то је да су ученици експерименталне групе показали знатно виши ниво знања у домену решавања задатака изван тематских области једначина и неједначина у односу на ученике контролне групе. С друге стране идеја функције на самом почетку, конкретније на иницијалном тесту, ученицима и Е и К групе показала се као потпуна непознаница, те је такав задатак (ff1a₆) на иницијалном тесту урадио по један ученик (2,27 %) из обе групе. Међутим следећа табела након другог финалног мерења показује другачију ситуацију.

Табела 30. Успешност ученика у трансферу знања на друге тематске области

N		Схема		Таблица		Елементарни низови			Идеја функције		
		ff1a ₃	ff1a ₆	ff2a ₃	ff2a ₆	ff3a ₆	ff3b ₆	ff3v ₁	ff4a ₆	ff4b ₁	ff4v ₅
Е група	44	70,45%	70,45%	70,45%	84,09%	86,36%	68,18%	72,73%	15,91%	59,09%	31,82%
К група	44	2,27%	2,27%	31,82%	56,82%	50%	63,64%	15,91%	2,27%	2,27%	2,27%

Посматрањем претходне табеле видимо да захтев који се односио на скицирање схеме која би послужила као помоћно средство при решавању првог задатка на другом финалном тесту (ff1a₃) од 44 ученика Е групе успешно је решило 70,45% (31 ученик) док је у К групи та успешност знатно нижа и износи 2,27% (1 ученик). У оквиру истог задатка такође је било важно извести и закључак у смислу коју адекватну методу одабрати за решавање задатка (ff1a₆) и ту су резултати такође били у корист Е групе, где је група која је била под утицајем Модела оставира изразито бољи резултат у односу на К групу.

Када је у питању други задатак са другог финалног теста такође анализираћемо његове две подкатегорије које су се односиле на цртање таблице и закључивање (ff2a₃ и ff2a₆). Од по 44 ученика из Е и К групе успешно је табелу скицирало 70,45% (31 ученик) групе која је била под утицајем Модела (проблемске наставе), односно 31,82% (14 ученика) групе која је радила на уобичајен начин.

Када је реч о извођењу закључака који се показао као потешкоћа код обе групе (Е и К) ученика на инцијалном тесту 84,09% (37) ученика Е групе дошло је до исправног закључка, док је код К групе то исправно учинило 56,82% (25 ученика). Видимо да су обе групе биле успешније када је било потребно одабрати метод по коме треба задатак урадити, док су се грешке појављивале приликом скицирања и попуњавања табеле (о најчешћим грешкама које су ученици правили говорићемо у неком од наредних поглавља).

С обзиром да наш програм подржава мишљење да је при разумевању идеје функције могуће користити различита вежбања у вези са елементарним нивовима одлучили смо се да пред ученике поставимо и такав задатак (ff3a,b,v) који је у себи садржао подкатегорије закључивања (ff3a₆, ff3b₆) и способности постављања адекватног математичког записа на основу дате слике (ff3v₁).

Задатак са елементарним нивовима конципирани смо тако да учиници на основу својих претходних знања и искустава могу уочити и објаснити правила која тај задатак одликују и извести генерализације. Дакле од 44 ученика Е групе и истог броја ученика К групе у трећем задатаку са другог финалног теста (ff3a₆) успешно је путем бројевних израза структуре у виду низова приказало 86,36% (38) групе која је била под утицајем експерименталног програма, односно 50% (22) ученика К групе која је радила на традиционални (устаљен начин). Затим, представљање структуре елемента низова на удаљеним местима уз помоћ бројевних израза (ff3b₆) успешно је приказало 68,18% (30) ученика Е групе и 63,64% (28) ученика К групе, међутим, када је било потребно извршити одређене генерализације (ff3v₁) уз помоћ алгебарских израза јасно је да се учиници контролне групе нису снашли, односно ученици експерименталне групе постигли су значајно бољи резултат. Према броју ученика успешност Е групе била је 72,73% (32), док је успешност К групе била 15,91% (7 ученика).

Последњи задатак на другом финалном тесту односио се на (ff4a,b,v) на извођење закључака и тумачење табеле која је одраз разумевања идеје функције и обухвата: објашњавање генерализација природним језиком (ff4a₆), приказивање генерализација уз помоћ алгебарских симбола (ff4b₁) и састављање адекватног текстуалног задатка који одговара претходном табеларном и симболичком запису (ff4v₅). Изражавање генерализација природним језиком успешно је приказало 15,91% (7) ученика Е групе, односно 2,27% (1 ученик) К групе. Приказивање генерализација уз помоћ алгебарских симбола у оквиру Е групе исправно је урадило 59,09% (26) ученика, односно 1 ученик из К групе.

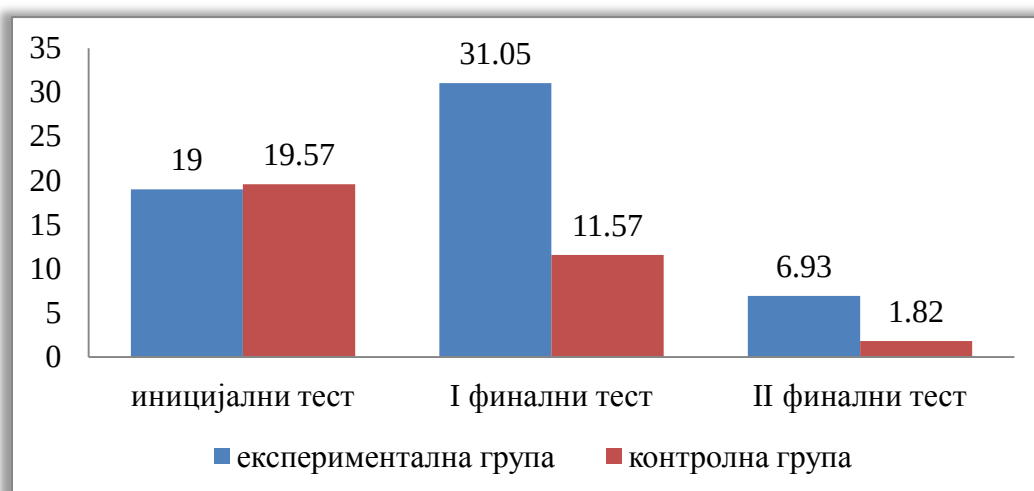
Као што видимо само 7 ученика Е групе је природним језиком описало оно што је у табели приказано, такав исход је последица ученикових претходних навика, јер су њихова дотадашња искуства била усмерена на изражавање података из табеле путем алгебарских симбола. Најзад, релевантан текстуални задатак који одговара одређеним изрзима успешно је осмилило 31,82% (14) ученика Е групе и само 1 ученик К групе. На основу свега реченог, јасно је да се група ученика (Е) која је била под утицајем Модела показала као успешнија у односу на групу (К) која није била обухваћена експерименталним програмом, на другом финалном тесту знања где је било важно утврдити да ли постоји трансфер знања ученика, и да ли ученици своја стечена знања могу применити у новим ситуацијама.

Такође, напоменућемо да садржаји који су чинили структуру другог финалног теста нису били обухваћени нашим спроведеним Моделом у оквиру експерименталног програма, те су нам послужили да утврдимо колико претходно стечена знања ученика могу обезбедити трансфер на друге тематске области, што је уједно и био један од наших задатака у овом истраживању.

4. Кратак осврт на компаративну анализу иницијалног, I и II финалног теста

Разлике које постоје у успеху ученика између експерименталне и контролне групе на сва три мерења (иницијално мерење, прво финално мерење и друго финално мерење) значајне су и са становишта просечног броја оставрених поена. Ученици експерименталне групе на иницијалном тесту остварили су просечно по 19 поена, док су ученици контролне групе остварили просечан број од 19,57 поена.

На првом финалном тесту ученици експерименталне групе оставрили су знатно већи просечан број поена с обзиром на иницијално мерење, односно 31,05 поена по сваком ученику, док су ученици контролне групе остварили чак и мањи број поена у односу на иницијално мерење, тачније 11,57 поена по ученику. На другом финалном тесту просечан број поена експерименталне групе износио је 6,93 док је контролна група остварила просечно 1,82 поена (Слика 49).



Слика 49. Просечан број поена експерименталне и контролне групе на иницијалном и финалним мерењима

Јасно је уочљиво да постоје разлике у развијености способности математичког моделовања између ученика експерименталне и контролне групе. Ученици који су били подвргнути експерименталном програму, тачније они који су учили путем проблемске наставе показали су знатно већи ниво развијене способности математичког моделовања у односу на контролну групу која је радила на уобичајен начин.

Све речено нам потврђује и просечан број оставрених поена према коме је експериментална група напредовала и остварила разлику у просечном броју поена између два мерења (иницијано и прво финално мерење) која износи 12, 05 поена, док је контролна група показала извештај пад где се прој поена смањио чак за 8. Дакле, на иницијаном мерењу експериментална и контролна група имале су уједначен просечан број поена, на првом финалном мерењу експериментална група је достигла скоро три пута бољи резултат од контролне групе, а на другом финалном мерењу експериментална група била је боља скоро четири пута у односу на контролну групу. Посматрајући добијене резултате целовито, можемо констатовати да је првих пет хипотеза у овом истраживању потврђено.

5. Анализа и интерпретација најчешћих грешака које су ученици правили на тестовима знања

Ради лакше анализе и интерпретације најчешћих грешака које су ученици експерименталне и контролне групе правили на иницијалном, првом и другом финалном тесту извршили смо кодирање ученичких радова, односно означавајући смо их на следећи начин: Уч.1К- i2 (Ученик 1, контролна група- иницијални тест, други задатак); Уч.1Е- f1a (Ученик 1, експериментална група- први финални тест, први задатак под а); Уч.1- ff1a (Ученик 1, - други финални тест, први задатак под а). Тестови се налазе у Прилозима 1,2 и 3.

У жељи да наша анализа буде систематична, адекватна и значајна представимо радове ученика Е и К групе са иницијалног теста, са I финалног теста и са II финалног теста тако што ћемо сваки од задатака где су грешке биле врло учестале сврстати у одређену категорију грешака са којом ћемо се упознати кроз даљи текст. Приликом анализе нећемо коментарисати сваки задатак посебно са тестова знања већ само оне у којима су ученици највише грешили и исказивали одређене облике потешкоћа.

Грешке које су ученици правили приликом решавања задатака на тестовима знања, односно при истицању степена развоја способности математичког моделовања могу се категорисати према следећим групама:

- занемаривање структуре једначине при иконичком представљању исте;
- погрешно транспоноване једначине из иконичког у симболичко окружење;
- игнорисање захтева у садржају задатка;
- игнорисање иконичког и симболичког облика једначина и неједначина при осмишљавању текста;
- погрешно разумевање структуре текста задатка и мешање формула;
- неадекватно извођење правила и закључака на основу постављене слике.

Кроз даљи ток теста сваки од наведених облика грешака поткрепићемо адекватним примерима (радови ученика) који ће нам употпунити анализу.

С обзиром да су врло лако постављену једноставну једначину ($3 \cdot x = 210$) ученици решили, други задатак на иницијалном тесту задао им је доста потешкоћа у смислу када је било потребно исту једначину из симболичког облика претворити у иконички. Многи ученици занемарили су структуру постављене једначине и водећи се претходним искуством заснованом на првом задатку у коме су такође врло лако допунили постављене иконичке представе једначина, када је било потребно да сами скицирају слику која одговара једначини наступиле су грешке. Начини на које су ученици представљали једначину облика $3 \cdot x = 210$ илустрован је на Примеру 44.

Пример 44. Погрешно разумевање структуре израза (једначине) при осмишљавању иконичке представе (слике)

а) Уч.24Е-і2

На основу дате једначине нацртај слику, а потом је реши.

$$3 \cdot x = 210$$

$$x = 210 : 3$$

$$x = 70$$

$$\text{пр: } 3 \cdot 70 = 210$$

210	
3	x

б) Уч.81К- і2

На основу дате једначине нацртај слику, а потом је реши.

$$3 \cdot x = 210$$

$$x = 210 : 3$$

$$x = 70$$

$$\text{пр: } 3 \cdot 70 = 210$$

3	
• x	210

Као што слике показују ученици су успешно дошли до решења задате једначине али иконичка представа није релевантна њеном симболичком запису. Сматрамо да ученици нису обратили пажњу на структуру једначине, већ су се водећи једначинама које су у вези са сабирањем и одузимањем и њиховим сликовним облицима, дошли до погрешне иконичке представе једноставне једначине $3 \cdot x = 210$. У оба примера (Пример 44 а и б) види се да ученици имају потребу да задате симболичке компоненте једначине само на неки начин уврсте у табелу коју су претходно скицирали, не видећи рачуна о томе шта структура постављене једначине представља. Овај облик грешке врло често се појављивао у радовима ученика и Е и К групе те смо га као такав сврстали у посебну категорију најчешћих грешака које су ученици начинили приликом решавања тестова.

Наредна грешка односи си се на ситуацију у којој су ученици задатак којим се испитује провера способност транспоновања информација из иконичког у симболичко окружење (ученици једначину задату ионички треба да представе симболички) доживели као илустрацију која га „улепшава“. Симболички прикази дате иконичке представе нису релевантни истој (Пример 45).

Пример 45. Погрешно разумевање иконичког облика једначине

а) Уч.35Е- i6

На основу слике запиши једначину, па је реши.

480					
x	x	x	x	x	x

Састави текстуални задатак који одговара слици (једначини).

Handwritten solutions:

$$x = 480 + x = 6$$

$$x = 480 + 6$$

$$x = 486$$

б) Уч.5Е- i6

На основу слике запиши једначину, па је реши.

480					
x	x	x	x	x	x

Састави текстуални задатак који одговара слици (једначини).

Handwritten solutions:

$$6 \cdot x = 480$$

$$x = 480 : 6$$

$$x = 80$$

$$x \in 74, 78, 77, \dots 03$$

Израчунај неједначину.

в) Уч.70К- i6

На основу слике запиши једначину, па је реши.

480					
x	x	x	x	x	x

Састави текстуални задатак који одговара слици (једначини).

Handwritten solutions:

$$300 + x = 480$$

$$x = 480 - 300$$

$$x = 180$$

$$170 - 300 + 180 = 480$$

Активност транспоновања информација из иконичког у симболичко окружење ученицима ја задао доста потешкоћа, те у вези са тим током анализе радова наишли смо на три подкатегорије овог проблема. Посматрајући рад под а (Уч.35Е- i6) јасно се види да ученик најпре не разуме иконичку структуру једначине облика $6 \cdot x = 480$, а потом записује симболичку структуру математичког израза који је бесмислен ($x = 480 + x = 6$). У другом раду под б (Уч.5Е- i6) ученик показује да донекле разуме структуру постављене слике, али услед највероватније непажње приликом читања упутства за решавање задатка уместо једначине записује неједначину.

Видимо да је овај ученик безуспешно покушао да састави текст о чему ће бити речи касније, прво што није записао адекватну једначину на основу слике, а потом из истог разлога због непажње приликом читања другог захтева ученик уместо текстуалног задатка записује реченицу која такође звучи бесмислено. Трећи рад под в, такође показује неразумевање икониичке представе једначине ($6 \cdot x = 480$) од стране ученика у којем ученик саставља једначину додавајући елементе које та једначина не садржи у свом икониичком облику. Ученик из непознатих разлога користи број 300 као једну од компоненти неадекватно записане једначине и постављену икониичку представу види као једначину облика $y + x = z$, уместо $y \cdot x = z$. Након свега наведеног можемо закључити да је транспоновање једначине из икониичког у симболичко окружење било врло тешко за ученике четвртог разреда основне школе. Међутим, можда су ученици у оваквом задатку наишли на потешкоће јер нису имали никако или двољно искуства у моделовању и симболичком представљању једначина.

Подаци које смо добили након увођења експерименталног програма иду у прилог претходно реченом, јер ученици (Е група) који су били под утицајем Модела показали су да су овакав облик проблема превазишли и тако остварили много бољи резултат него контролна група (о чему је речи било раније). Све наведене примере груписали смо под једну категорију тј. *погрешно транспоновање једначине из икониичког у симболичко окружење*, јер мишљења смо да се свака врста наведеног проблема темељи на неразумевању икониичког облика једначине.

Следећа ситуација због које су ученици правили грешке приликом решавања задатака на тестовима знања у вези је са игнорисањем захтева у садржају задатка од стране ученика. Овај проблем највише се испољио на решавање неједначина путем задате табеле што ће нам потврдити наредни примери.

Пример 46. Игнорисање захтева у садржају задатка

а) Уч.36Е- i5

5. Одреди скуп решења следећих неједначина помоћу табеле:

а) $900 + x < 1450$ $x < 1450 - 900$ $x < 550$ $x \in \{549, 548, 547, \dots\}$

x								
$900 + x$								

$x \in \{549, 548, \dots, 0\}$

б) $2500 - x > 200$ $x < 2500 - 200$ $x < 2300$ $x \in \{2299, 2298, 2297, 2296, \dots, 0\}$

x								
$2500 - x$								

$x \in \{2299, 2298, \dots, 0\}$

б) Уч.79К- i5

5. Одреди скуп решења следећих неједначина помоћу табеле:

а) $900 + x < 1450$

x								
$900 + x$								

$x \in \{ \}$

б) $2500 - x > 200$

x								
$2500 - x$								

$x \in \{ \}$

Handwritten notes on the right side of the page:

$900 + x < 1450$
 $x < 1450 - 900$
 $x < 550$
 $x \in \{549, 548, 547, \dots\}$

$2500 - x > 200$
 $x < 2500 - 200$
 $x < 2300$
 $x \in \{2299, 2298, 2297, 2296, \dots\}$

в) Уч.79К- f2

Сељанка је на пијаци један дан продала мање од 200 јаја. Одреди колико је кутија продала ако је у свакој било 25 јаја.

Запиши неједначину: $x \cdot 25 < 200$ $x < 200 : 25$ $x < 8$ $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 7\}$

Табела ће ти помоћи при решавању, попуни је.

Шта закључујеш на основу табеле? _____

Која су решења неједначине? $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

Одговор: Продајца је мање од 8 кутија

Први пример који смо навели (Уч.36Е- i5) рад је ученика експерименталне групе и јасно показује да ученик игнорише захтев који је дат у садржају задатка. Било је потребно дате неједначине решити попуњавањем задате табеле, међутим ученик је неједначине решавао устаљеном методом путем изражавања непознатих компоненти, а где је притом табелу у потпуности занемарио. Следећа два примера под б и в (Уч.79К- i5 и Уч.79К- f2) радови су истог ученика контролне групе при решавању задатака на иницијалном и на првом финалном тесту (паралелна верзија). Посматрањем задатака на оба теста може се уочити да ученик такође игнорише табелу и да до решења неједначина долази такође методом изражавања непознате компоненте.

Сваки захтев који је био у вези са табелом једноставно је игнорисан, а ученици су их решавали на основу претходних знања и искустава. С обзиром на наведено може се закључити да је игнорисање табеле од стране ученика настало као последица досадашњег неискуства када је у питању решавање неједначина уз помоћ табеле. Мишљења смо да се ученици нису до сада сусрели са оваквим захтевима па је и проблем био неизбежан. Сматрамо да је недовољан и неадекватан развој способности математичког моделовања код ученика прави одговор на питање: Зашто је ученицима решавање неједначине уз помоћ табеле представљало проблем?

Следећи проблем који се нашао пред ученицима односи се на ситуацију у којој ученици занемарују (игноришу) иконички/симболички облик једначине, те због тога нису били у могућности да осмисле адекватан текстуални задатак који би дату једначину употпунио. У Примеру 47 представимо четири рада ученика како експерименталне тако и контролне групе истог задатка с циљем расветљавања претходно споменуте потешкоће.

Пример 47. Игнорисање иконичког / симболичког облика једначине при осмишљавању текстуалног задатка

а) Уч.7Е-і6

На основу слике запиши једначину, па је реши.

480					
x	x	x	x	x	x

$6 \cdot x = 480$
 $x = 480 : 6$
 $x = 80$
 Провера $80 \cdot 6 = 480$

Састави текстуални задатак који одговара слици (једначини).

Емилија је дошла у болницу и замислила је још неколико и дошла је чар. Који број је Емилија замислила?

б) Уч.17Е- і6

На основу слике запиши једначину, па је реши.

480					
x	x	x	x	x	x

$6 \cdot x = 480$
 $x = 480 : 6$
 $x = 80$
 $Pr = 680 = 480$

Састави текстуални задатак који одговара слици (једначини).

Марко је имао неку суму новца, дао је брату 600 динара и остало му је 390 динара. Колико је Марко имао новца?

в) Уч.54К- і6

На основу слике запиши једначину, па је реши.

480					
x	x	x	x	x	x

$6 \cdot x = 480$
 $x = 480 : 6$
 $x = 80$

Састави текстуални задатак који одговара слици (једначини).

Мари је имала 480 динара, потпуно из гала и отишла је 250. $480 - x = 250$ $x = 480 - 250$ $x = 230$

Након интерпретације неких од радова ученика у којима се извесни проблем јавио приступићемо анализи која ће потпуније приказати потешкоће. Дакле, први рад под а (Уч.7Е-і6) показује да ученик експерименталне групе познаје и разуме иконичку представу једначине, потом исправно представља њен симболички запис, те долази до тачног решења једначине, међутим проблем се јавио када је било потребно саставити адекватан текст који одговара датој једначини. У овом случају ученик саставља задатак који је бесмислен како у текстуалном тако и у математичком контексту. Прво је било речи о „замисљеним бомбонама“, док су се на крају задатака те бомбоне свеле на „замисљен број“. Ученик је текст започео с једном идејом а завршио са другом идејом. Стиче се утисак да је ученик обраћао пажњу на постављену једначину јер је у тескту споменуо компоненте једначине али ипак је током текста „изгубио своју мисао“ и тако свој текстуални задатак учинио бесмисленим.

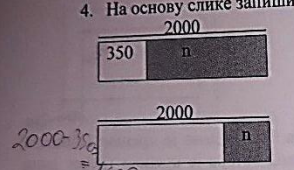
Преостала два примера под б и в (Уч.17Е- i6 и Уч.54К- i6) такође показују да ученици успешно представљају симболички једначину која је задата у иконичком облику, такође успешно је и решавају, док се претходно наведени проблем понавља. Приликом састављања текстуалног примера који би требало да поткрепи иконичку и симболичку форму једначине у овим случајевима ученици постављену једначину игноришу и састављају текст који није релевантан једначини симболичког облика $6 \cdot x = 480$. Као што видимо то се дешавало и код ученика експерименталне, али и код ученика контролне групе.

Проблем који смо сврстали у исту категорију као и претходни односио се на састављање текстуалног задатка на основу иконичке/симболичке представе али овога пута код неједначина. Овакав тип задатака налазио се у структури I финалног теста и грешке које смо идентификовали приказано кроз интерпретацију и анализу следећих примера (Пример 5а, 5б). Најпре ћемо споменути оно о чему смо раније говорили а то је да је од укупно 44 ученика контролне групе захтев састављања релевантног текстуалног задатка постављеној неједначини адекватно испунио само 1 ученик (2,27%), док је код експерименталне групе (групе која је била под утицајем Модела) овај вид захтева успешно савладало 23 (52,27%) ученика.

Пример 48. Игнорисање иконичког / симболичког облика неједначине при осмишљавању текстуалног задатка

а) Уч.60К-f4

4. На основу слике запиши неједначину, потом одреди скуп њених решења.



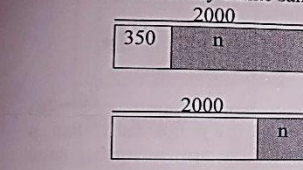
Састави текстуални задатак који одговара неједначини (слици).

Метр је змио слику неку бр. од нег је одузео 1650 и добио бр. мању од 2000. Која су то бројеви?

Handwritten work shows the inequalities $n - 350 \leq 2000$ and $n \leq 2000 + 350$, leading to the solution set $\{2350, 2349, \dots, 351\}$. Another set of inequalities $1650 - n < 2000$ and $n > 2000 - 1650$ leads to the solution set $\{2251, 2252, \dots, 1649\}$.

б) Уч.27Е- f4

4. На основу слике запиши неједначину, потом одреди скуп њених решења.



Састави текстуални задатак који одговара неједначини (слици).

Разлика 2000 одузми непознати бројем и умножи га 3,50.

Handwritten work shows the inequalities $2000 - n > 350$, $n < 2000 - 350$, and $n < 1650$, leading to the solution set $\{1649, 1648, \dots\}$.

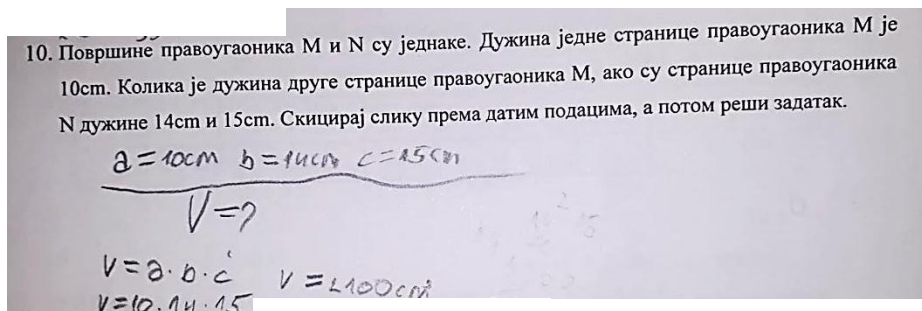
Пример 48 под а (Уч.60К-f4) рад је ученика контролне групе на основу кога можемо да изведемо закључак да ученик најпре не разуме иконички облик задате неједначине, што даље условљава настанак проблема приликом састављања текстуалног задатка који је требао ту неједначину да одсликава. Други пример под б (Уч.27Е- f4) показује да ученик експерименталне групе разуме иконички облик неједначине, исправно је записује, решава и наводи скуп решења.

У овом примеру ученик показује да разуме везу између креиране сликовне представе неједначине и њеног симболичког записа, што није случај у Примеру 5а. Међутим проблем састављања текста поново је манифестован. Могуће је да су овакви резултати добијени јер претходна искуства ученика у вези са оваквим захтевима нису постајала. Применом Модела ученици експерименталне групе отклонили су потешкоћу транспонавања неједначина из иконичког у симболички свет, што није случај са ученицима (контролна група) који нису били обухваћени Моделом.

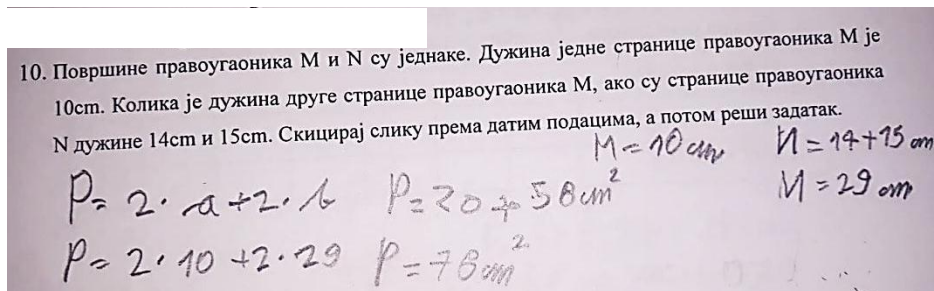
За састављање текстуалних задатака донекле одговорна је и креативност ученика што ми нисмо мерили нашим Моделом. Претпоследњи облик грешке коју су ученици врло често правили односи се на погрешно разумевање структуре текста задатка и мешање формула. О чему је реч показеће нам следећи примери (Пример 49а, 49б).

Пример 49. Погрешно разумевање структуре текста задатка и мешање формула

а) Уч.7Е-і10



б) Уч.48К- і10



У првом примеру 49а (Уч.7Е-і10) ученик најпре показује да не разуме структуру текста задатка, потом игнорише захтев (скицирај слику према датим подацима), те на крају меша формуле. Уместо формуле којом се изражава површина правоугаоника ученик је у задатаку користио формулу којом се изражава запремина коцке. Мишљења смо да су се ученици непосредне пре увођења Модела бавили запремином коцке те им је та формула остала као најсвежија, с обзиром на површину правоугаоника која је рађена доста раније. У овом случају ученик је показао и да не разуме разлику између геометријских фигура и геометријских тела, према свом приказаном резултату правоугаоник је уврстио међу тела тј. објекат са три димензије.

Други пример 49б (Уч.48К- і10) такође показује да ученик не разуме структуру садржаја задатка, игнорише захтев скицирања слике, а самим тим меша формуле којима се изражавају

обим и површина правоугаоника. У конкретном примеру ученик уместо формуле за површину правоугаоника записује формулу за његов обим при чему сматра да је то формула којом се изражава површина ове фигуре. Мишљења смо да би скицавање слике на основу текста задатка ученицима доста помогло да дођу до исправног решења, јер би на тај начин имали потпуну визуелну импресију и можда не би дошли у ситуацију да мешају формуле.

Последња грешка или боље речено потешкоћа са којом су се ученици сусрели највише је испољена кроз иницијални и II финални тест, а у вези је тематском облашћу која је била изван области једначина и неједначина. Реч је о идеји функције. Ученици су најпре на иницијалном тесту показали свој несупех где је од укупно 44 ученика из експерименталне и истог броја ученика контролне групе свега по 1 ученик у обе групе успешно изразио функционалну зависност симболички, која је била представљена схемом.

Пример 50. Неадекватно утврђивање правила и зависности међу величинама на основу кога је попуњена дата табела

а) Уч. 62K-i11

11. Уочи правило по коме је попуњена следећа табела.

a	1	2	3	4	5	6
b	3	5	7	9	11	13

На основу правила које си уочио напиши једнакост која показује однос између a и b .

$6a + (2+3+4+5+6+7) = 6b$ $6a + 27 = 6b$

б) Уч. 14E-i11

11. Уочи правило по коме је попуњена следећа табела.

a	1	2	3	4	5	6
b	3	5	7	9	11	13

На основу правила које си уочио напиши једнакост која показује однос између a и b .

a и b се разликују за 2 јединице.

Анализирајући радове ученика на иницијалном тесту од 44 ученика експерименталне групе 21 ученик (47,73%) није чак ни покушао да реши овај задатак, док код контролне групе од истог броја ученика овај задатак није ни покушало да реши 16 (36,36%) ученика. У оба примера ученици јасно показују да не разумеју како на основу датих података из табеле треба извести правило, односно зависност између променљивих a и b , заправо показују да у свом претходном искуству не поседују трагове идеје функције. Ово је био задатак на иницијалном тесту који је најнесуспешније урађен од ученика обе групе.

У жељи да променимо овакву ситуацију сачинили смо II финални тест који је имао за циљ да испита трансфер знања ученика, те смо у оквиру његове структуре уврстили и задатак који је био у вези са идејом функције, с намером да утврдимо да ли је група која је била под утицајем Модела постигла боље резултате с обзиром на иницијално мерење.

Резултати које смо добили на II финални тесту показују да је експериментална група достигла знатно већи напредак у односу на контролну групу код које је опет само 1 ученик успешно решио овакав задатак, али и у односу на своје почетно мерење. Више о томе говори смо приликом анализе резултата у претходном поглављу.

в) Уч.46K-ff4

4. Уочи правило по коме је попуњена табела.

m	5	6	7	8	9	10
n	8	10	12	14	16	18

а) Покушај да опишеш речима правило које си уочио.
у сваком m су се променили постојећи бројеви једнако
у сваком n су се променили постојећи бројеви једнако

б) Запиши једнакост која показује однос између m и n.
m = n - 1

в) Састави један текстуални задатак који одговара изразу који запишеш (и табели):

У Примеру 50в (Уч.46K-ff4) види се да ученик контролне групе и даље не разуме на који начин да уочи правило, нити да на основу њега изведе закључак у каквом се односу налазе променљиве m и n. Ученик сада променљиве m и n доживљава као одређени скуп бројева који се међу собом разликују, а не као компоненте где се једна може изразити преко друге. Не знамо да ли се ученик збунио приликом писања односа или је заиста мислио да то може бити исправно када је записао „ $m=n-1$ “, што је математички бесмислено. Пошто су ученици који нису били обухваћени Моделом показали исти ниво знања као и на иницијалном мерењу јасно се може закључити да њихова претходна искуства у вези са идејом функције једноставно не постоје.

Сматрамо да је врло важно указати на ситуације које су категорисане кроз најчешће грешке, недоумице и потешкоће ученика како бисмо имали реалну представу о ученичким могућностима и постигнућима пре и после примене Модела. Сумирањем целокупне анализе и интерпретације резултата дошли смо до закључка да спровођење проблемске наставе на часу математике ефикасно утиче на развој способности математичког моделовања, у чији прилог посебно иду постигнућа експериментлане групе које је оставрила након спровођења експерименталног програма.

6. Ставови ученика у вези са ефектима имплементације проблемске наставе на часовима математике

У овом делу рада бавићемо се анализом одговора ученика са којима је спроведен интервју после примене модела (проблемске наставе) на часу математике. Садржај интервијуа био је конципиран кроз три међусобно повезне категорије: (1) испитивање и утврђивање односа ученика према настави математике; (2) истраживање ставова ученика у вези са имплементацијом проблемске наставе; (3) испитивање мишљења ученика у вези са задацима који су били део проблемске наставе на часу математике. Интервју је спроведен са сваким учеником појединчано који је био активан учесник у проблемској настави.

Кључни, структурални део интервјуа чинило је 10 питања која су представљала сваку од наведених категорија:

1. категорија- Однос ученика према настави математике.

- Да ли волиш математику? Зашто?
- Сматраш ли да је математика потребна у животу? Због чега?

2. категорија – Ставови ученика у вези са имплементацијом проблемске наставе на часу математике.

- Да ли су ти се допали часови математике које сам ја одржала?
- Да ли су се ови часови разликовали од других часова математике? У чему је разлика?
- Да ли би нешто променио на тим часовима?
- Да ли би више волео оваквих часова математике? Због чега?

3. категорија – Мишљења ученика у вези са задацима на часу проблемске наставе.

- Који задаци су ти били најлакши за решавање на тим часовима?
- Када си имао највише потешкоћа приликом решавања задатака на тим часовима?
- Који задаци су ти били најзанимљивији на тим часовима? Наведи их.
- Шта је најважније што си научио на тим часовима?

Како бисмо имали комплетан увид у испољене ставове ученика према настави математике, проблемској настави и задацима у овом наставном систему у даљем тексту бавићемо се анализом одговара ученика у складу са три представљене категорије.

6.1. Однос ученика према настави математике

Од 44 испитана ученика на постављено питање Да ли волиш математику? Зашто? позитиван одговор дало је 39 ученика што износи 88,64%, односно негативан одговор дало је 5 ученика што износи 11,36%. Разлози због којих су ученици испољили негативан однос према настави математике огледају се кроз незадовољство ученика у погледу оцене коју имају из овог наставног предмета, потом, неки ученици су наводили да им математика „једноставно не иде“ те да су фокусирани на друге наставне предмете па се не труде да је разумеју.

Позитиван став према настави математике испољило је знатно већи проценат ученика (88,64%) а битни разлози за то углавном су сличног садржаја и наслањају се на следеће чињенице: математику посматрају као врло забав предмет, ученици уживају док решавају задатке, математика пружа увек нове изазове, математика не мора да се учи напамет као садржаји поједних наставних предмета и сл. Такође поједини ученици су наводили да воле математику јер им „једноставно иде“ и имају боље оцене у односу на друге наставне предмете.

Питање које је ученике навело да наставу математике посматрају у контексту реалних ситуација такође је било део конципираног протокола интервјуа и имало је за циљ да нам предочи да ли ученици имају развијену свест о значају математике у свакодневном животу и у чему се огледа њена примена.

Одговори ученика на питање Сматраш ли да је математика потребна у животу? Због чега? имали су позитиван исход, јер су ученици свесни њеног значаја у свету који их окружује. Ту чињеницу потврђују одговори типа: „многа занимања захтевају знање из математике; потребна нам је у продавници да бисмо знали колики кусур трговац треба да нам врати; потребна је да бисмо знали колико шта треба да платимо; има важну улогу у даљем школовању; сваки посао захтева математику посебно трговина и грађевина (да знамо како да направимо кућу) и др. Сви ученици су навели адекватне примере из свакодневног живота са којима су математику повезали и тиме истакли њену важну улогу у реалном окружењу.

Како бисмо поткрепили наведено кроз наредне примере представимо неке од одговора ученика. Пошто је у испитивању учествовала само експериментална група радове ћемо кодирати као Уч.1; Уч.5 и сл., што би значило Ученик 1, Ученик 5 и сл.

Пример 51. Неки одговори ученика у вези са значајем математике у животу.

Сматраш ли да је математика потребна у животу? Због чега?

Уч.1: „Да потребна је у послу и у другим стварима, у продавници за кусур“.

Уч.4: „Да потребна је. Зато што ће нам требати кад порастемо“.

Уч.5: „Сматрам да је математика потребна. Зато што идемо на факултет и да би добили леп посао“.

Уч. 15: „Јесте, због тога што за многа занимања треба знање из математике“.

Уч.31: „Да, потребна је. Да бисмо решавали проблеме из рачуноводства“.

Закључак који се може извести сагласан је ситуацији да испитани ученици увиђају значај математике који овај наставни предмет има у реалном животу. Битност математике ученици су препознали у многим животним ситуацијама што је врло важно, јер многе реалне ситуације могу да се искажу математичким језиком, а математички језик много се боље разуме ако је одраз неке животне ситуације која је блиска ученицима.

6.2. Ставови ученика у вези са спровођењем проблемске наставе

Однос ученика према проблемској настави на часовима математике саткан је на основу различитих одговора на питања која су била у склопу ове категорије. Одговоре које смо добили били су врло важни за нас јер су се директно односили на Модел који смо спровели са експерименталном групом. Сви ученици експерименталне групе (44) изнели су мишљење да су им се часови проблемске наставе допали јер су се разликовали од часова са којим су се раније сусретали на истом предмету. Према мишљењу ученика оно што је часове проблемске наставе издвојило у односу на друге часове можемо сврстати у три категорије: (1) занимљиви и другачији задаци; (2) различите стратегије решавања проблема; (3) различите репрезентације проблема.

Ученици су били сагласни у одговорима када су истакли своје мишљење да углавном не би ништа променили на часовима проблемске наставе, осим што би волели да се награде (мотивационо средство) доделе свима без обзира на успешност приликом решавања задатака, да се ради са мањим блоком бројева, те да буде мање текстуалних задатака.

Оно што их је посебно привукло при спровођењу часова проблемске наставе јесте мотивациона улога „поклона“ (школског прибора) које су ученици добијали приликом адекватно постављеног и решеног задатка, таква ситуација подстакла је многе ученике да уложе максималан труд и напор што није свакидашња појава појединаца.

Ученици би волели да им се часови математике чешће заснивају по принципу проблемске наставе јер на тај начин како они кажу: „учимо доста тога новог, другачијег, по неким занимљивим поступцима са којима се до сада нисмо срили“. Такође истакли су чињеницу да им је сваки задатак представљао један нови изазов који је требало да савладају, те да је функција „поклона“ одиграла важну улогу у том смилу да ученици нису стрепели од могућности добијања лоше оцене. Навели су да је додела школског прибора оним најуспешнијим много значајнија него добра оцена. Награда успешном ученику не само да је била мотивишуће средство за њега самог већ и за остале ученике који су се много више трудили и на сваки начин покушавали да истакну бар делић свог знања. Такав вид подстицаја на ученике је оставио велики утицај јер је сваки наредни час употпунило више активности и улагања сопственог труда.

Пример 52. Однос и мишљење ученика према моделу проблемске наставе

Да ли су ти се допали часови математике које сам ја одржала?

Уч. 1: „Да допали су ми се зато што сам научила нешто ново.Тј. што сам научила да решавам једначине са сликом“.

Уч. 10. „Да веома су ми се допали и помогли су ми у знању из математике, које до сада нисам имала“.

Уч.14: „Да, први пут сам видела да једначине могу бити сликовне“.

Да ли су се ови часови разликовали од других часова математике? У чему је разлика?

Уч. 1: „Много су се разликовали због поступка решавања задатака“.

Уч. 3: „Разликовали су се. Разлика је зато што су занимљивији“.

Уч.10: „Да, ови задаци су мало тежи због табела и слика“.

Уч.14: „Да зато што код учитељице не цртамо баш никад такве слике са једначинама и неједначинама“.

Уч.41: „Да разликовали су се ми на математици радимо задатке у свеску а на овим часовима радимо интересантне листиће“.

Анализирајући радове ученика и бавећи се испитивањем односа ученика према часовима проблемске наставе дошли смо и до закључка да су се ученици до сада врло мало сусретали са иконицима облицима једначина и неједначина, што оправдава резултате о којима смо говорили на иницијалном тесту знању.

Много одговора ученика било је сконцетрисано у домен да им се модел проблемске наставе допао јер су научили нешто ново са чиме се до сада нису сусрели (иконичке форме једначина и неједначина, решавање неједначина уз помоћ табеле и сл.). Јасно је да ученици воле било какав вид промене, увек исти начин рада са ученицима изазива монотоност, незаинтересованост и немотивисаност што се даље негативно одражава на усвајање и примену знања.

Одговори које смо добили од ученика такође су потврдили оно што нам је и статистика показала тј. да је ученицима недостајала потпора у развоју способности математичког моделовања.

На основу свега реченог истаћемо да су ученици испољили позитиван став према спровођењу проблемске наставе, јер су им ти часови разбили монотоност претходних часова с једне стране, а допринели стицању ефикасног знања у вези са једначинама и неједначинама с друге стране. С тим у вези ово би могла бити једна ефектна импликација на васпитно-образовну праксу која своје објашњење проналази у чешћој примени проблемске наставе на часовима математике, кадгод су за то остварени услови, односно увек када нам то наставници садржаји дозвољавају. Морамо имати на уму да не могу баш сви математички садржји да подлегну моделу проблемске наставе.

6.3. Мишљења ученика у вези са задацима који су били саставни део проблемске наставе

Када анализирамо ставове ученика у вези са задацима који су били важан део спровођења проблемске наставе можемо направити селекцију на „лакше“ оне које су ученици решавали са лакоћом, и „теже“ оне при чијем решавању су ученици наилазили на одређене баријере и потешкоће.

Врста задатака где су се ученици брзо сналазили и успешно креирали стратегије и поступке решавања углавном су били задаци чије је решавање захтевало коришћење једне рачунске операције која је водила до решења. Нсупрот томе, задаци који су исказивали потребу за коришћењем више рачунских операција и који су захтевали ослањање на претходна искуства, ученицима су задавали многе потешкоће. Састављање и решавање неједначина ученицима је задавало бројне недоумице те су их ученици углавном изједначавали са једначинама и долазили до погрешног решења. Табеле које је било потребно попунити како би се изнашла сва решења неједначине такође су ученицима задавале главобољу. Ученици су успешно решавали задатке који у себи нису садржали неку од иконичких представа, док су се у свим другим, где су биле присутне табеле, идеографи и сл. теже сналазили све док нису схватили улогу и значај моделовања.

Према изјавама ученика најтежи задаци су им били они који су захтевали да се на основу симболичких представа састави адекватан текст који ће употпунити његову алгебарску структуру. С тим у вези јасно можемо указати на постојање проблема у смислу претварања математичког записа у реалан текстовни контекст, док је случај у обрнутом следу био изложен мањим потешкоћама. Главни узрок оваквих закључака огледа се у недовољној и неадекватној и на време неразвијеној способности математичког моделовања код ученика.

Табела 31. Обликовани одговори ученика у складу са поделом задатака на „лаке“ и „тешке“

Врсте задатака у складу са степеном тежине (креирано према одговорима ученика)	
„лаки“	„тешки“
Решавање једноставне једначине задате симболички	Иконички приказ једначине

Решавање једноставне неједначине задате симболички	Решавање неједначина уз помоћ табеле
Решавање једначина у вези са сабирањем и одузимањем	Превођење једначине и неједначине из иконичког у симболичко окружење
Једначине и неједначине које не захтевају састављање текста који их описује	Састављање текста који одсликава једначину/неједначину
	Идеја функције

Пример 53. Исказивање мишљења од стране ученика у вези са врстом задатака који су третирани као „тешки“.

Када си имао највише потешкоћа приликом решавања задатака на тим часовима?

Уч.1: „Најтеже су ми биле табеле помоћу којих се решавају неједначине“.

Уч.3: „Код задатака са сликом“.

Уч.6: „Да нацртам слику на основу једначине“.

Уч.10: „Када су биле табеле“.

Уч.14: „Кад треба да се цртају слике, али сам касније схватила“.

Уч.21: „Највише потешкоћа сам имала за састављање текстова“.

У оквиру ове категорије интервјуа сазнали смо и који су то задаци ученицима били назанимљивији, као и то шта је ученицима најважније што су научили на часовима заснованим на моделу проблемске наставе. Задаци који су заокупили пажњу ученика и пробудили велико интересовање за сваки нови наредни задатак били су они са којима се ученици нису до сада сусрели, као и они који су на иницијалном тесту ученицима задали много потешкоћа. Типови задатака које су ученици означили као „тешки“ заправо се испоставило да су им такви задаци током спровођења Модела били најзанимљивији. Међу њима највише су се истакли они чија је структура захтевала допуњавање или самостално представљање иконичких представа једначина, потом трансформација једначина и неједначина из симболичког у иконичко окружење и обрнуто. Дакле, ученицима је било врло занимљиво да моделују и да унапређују личне способности у развоју математичког моделовања.

Пример 54. Мишљење ученика у вези са најзанимљивијим задацима на часовима проблемске наставе.

Који задаци су ти били најзанимљивији на тим часовима? Наведи их.

Уч.15: „Задаци где треба да саставимо текст“.

Уч.17: „Једначине и неједначине са сликама“.

Уч.24: „Са цртањем сличица и писањем текста, код једначина и неједначина“.

Приликом изјашњавања ученика о томе шта су важно научили путем часова проблемске наставе одговори су углавном били сконцетрисани на: учење нових поступака приликом решавања једначина и неједначина; лакши пут доласка до решења; састављање једначина и неједначина на основу иконичких представа; превођење задатка из математичке у реалистичну форму (састављање текста на основу симболичког записа) и сл.

Када сагледамо све одговоре ученика изводи се јасан закључак, да оно најважине што су ученици научили кроз имплементацију проблемске наставе на часу математике јесте да користе различите методе и поступке при састављању и решавању једначина и неједначина, односно пробудила се, подстакла и развила способност математичког моделовања.

С обзиром на претходно размотрене одговоре ученика можемо извести закључак да испитани ученици експерименталне групе исказују позитиван став према имплементацији проблемске наставе на часовима математике чиме је потврђена наша последња хипотеза истраживања. Разлози за то су бројни, а само неки од њих су: часови проблемске наставе су занимљивији од класичних часова; пут доласка до решења посредством разних модела је много лакши; негује се такмичарски дух; атмосфера на тим часовима је испуњена знатижељом; подстакнута је стална интеракција и кооперативан однос између ученика и сл.

7. Циљано посматрање ученика у процесу проблемске наставе на часу математике

Методом квалитативне анализе извршили смо циљано посматрање три ученика експерименталне групе у сврху писања детаљног извешатај о току реализоване активности проблемске наставе на часу математике. Несебична помоћ педагога школе у којој је спроведен експериментални програм, била нам је од велике помоћи у виду белешки које су одсликавале одабране ученике, начиније њихове активности, понашање и поступке на часовима математике заснованих на моделу проблемске наставе.

Ученици који су посматрани Ања, Петар и Никола, показују различите могућности, способности и склоности према настави математике с обзиром на оцену коју имају. Према досадашњим сазнањима и увидом у књигу евиденије (дневник васпитно-образовног рада) Ања има оцену, одличан 5 из математике, Петар оцену, врло добар 4 и Никола оцену, добар 3.

На самом почетку истаћемо да оцене ученика углавном нису у вези са реакцијама које су ученици испољавали на часовима проблемске наставе. Оно што је заједничка одлика која је све време преовладала код ученика приликом имплементације проблемске наставе јесте висок ниво заинтересованости и знатижеље (у смислу, да ли је следећи задатак сличан претходном или у себи садржи нешто ново?).

Сви посматрани ученици на овим часовима истакли су се високим степеном мотивације, при чему ни једног тренутка нису показали да им је досадно и монотono. Мотивисаност ученика могла се видети на основу њиховог односа и опхођења према раду у коме је важну улогу играло нестрпљење за новим наставним листићем са другачијим проблемом. Рецимо Ања која увек има тежњу да се истакне, све време је покушавала да сваки постављени проблем прва разуме, реши, а потом и да прва изложи своје решење и поступак који је спровела како би до решења дошла. За разлику од ње Петар који је увек спорије решавао проблеме из страха да негде не погрешити углавном је запушавао уши не желевши да чује крајње решење док сам до њега не дође. Међутим, уколико би први дошао до тачног решења узбуђење га није могло зауставити да то одмах искаже и тако задобије поверење како наставника тако и осталих ученика у одељењу. Његова активност при упознавању са сваким проблемом била је енергична, док је приступ проблему текао споро али сигурно. Њорђе као просечан ученик није волео претерано да се истиче, решавао је проблеме својим темпом, понекад је грешио и то доживљавао као сасвим нормалну појаву која је резултирала увидом у грешку и ревидирањем исте.

То је био ученик који је једва чекао час математике јер се на том часу „решавају занимљиви задаци“. Свака похвала која им је упућена за успешно решен проблем деловала је на њих као стимулативни фактор који им је помагао да све наредне проблеме решавају са пуно уверења, самопоуздања и воље. Сваки нови постављени проблем од стране посматраних ученика прихваћен је као велики изазов, при чијем би се решавању будило одушевљење, уколико ученик самостално успешно реши проблем чак и без минималне помоћи наставника.

Ниједан од ученика није скривао свој успех у проналаску адекватне стратегије за решавање проблема који се пред њима нашао. Посебан утицај на њих имао је вид спољашњег подстицаја (мотивације) од стране наставника који је ученику који успешно реши проблем поклањао школски прибор. То је на сва три ученика па и на све друге учеснике експерименталног програма изражавало позитиван ефекат, тако да су сви улагали много труда, напора и концентрације како би дошли до исправног решења датог проблема. Ученици ни једног тренутка нису били демотивисани, активно су учествовали у дискусијама у вези са поступцима решавања једначина и неједначина и покушавали да своје резултате прикажу у најбољем светлу. На часовима математике путем проблемске наставе сва три посматрана ученика показала су изузетан ниво активности које су подстицане од стране константних мисаоних напора, а све са циљем доласка до исправног решења.

Највеће одушевљење ученици су показивали у задацима који су им с неке стране били „најтежи“ то су били примери у чијој структури се налазила одређена слика или табела, на основу којих су морали да изводе разноврне закључке који су им били примарна помоћ при решавању проблема.

Водећи се описаним односом ученика према наведеним садржајима врло често је навирало питање: Да ли су се ученици некада раније сусретали са иконичким представама једначина и неједначина? Изграђен је утисак да је можда било раније речи у вези са таквим поступцима решавања једначина и неједначина али је негде остављен по страни, занемарен и заборављен. Што одмах указује на ситуацију да је развој способности математичког моделовања на неки начин ученицима био ускраћен и стављен у стање мировања. Такође, значајне позитивне реакције ученици су показивали приликом решавања проблема који су имали за циљ саставање текста који га верно одсликава. У таквим ситуацијама посматрани ученици су били посебно заинтересовани јер су били знатижељни да чују какве су то текстове други ученици састављали и какав је њихов садржај. Ања, Петар и Никола показивали су врло флексибилан однос према раду на часовима проблемске наставе кроз који су се прожимали елементи заинтересованости, воље и жеље.

Сваку нову проблемску ситуацију доживљавали су као нови изазов, кроз контекст упознавања неког новог алгорита и креирања неке нове стратегије која им је била од велике користи при изналажењу решења. Свака ситуација примене стечених знања у другачијим и новим ситуацијама у њима је будила осећај успеха јер су се ученици ослањали на своја претходна искуства. Проблемске ситуације које су захтевале минимално ослањање на претходна знања и искуства будиле су посебне осећаје код посматраних ученика у виду неког стимулативног агенса за решавање исте.

На основу свега реченог ствара се јасна слика која говори о томе да је проблемска настава ефикасан наставни систем нарочито при изучавању математичких садржаја и развоју способности математичког моделовања. Модел проблемске наставе делује мотивишуће на ученике, заокупља њихову пажњу, захтева концентрацију и максималну активацију мисаоних активности, потом је прихваћен је од стране ученика, па као такав намеће потребу да се чешће спроводи на часовима математике.

Уважавањем и спровођењем проблемске наставе оствариће се значајни циљеви савременог образовања у контексту развоја критичког и стваралачког мишљења ученика, али остварићи се и сви основни неопходни услови за успешну реализацију сада врло актуелне пројектне наставе која је у фокусу најсавременије васпитно-образовне праксе.

IV ИМПЛИКАЦИЈЕ И ЗАКЉУЧЦИ

1. Методичке импликације

С обзиром на адекватну теоријску потпору извршеног истраживања и ефикасност емпиријске евалуације утицаја модела проблемске наставе на развој способности математичког моделовања, у овом поглављу објаснићемо методичке импликације нашег истраживања у виду препорука значајних за науку, организацију и имплементацију наставног процеса, али и за даља истраживања.

Посматрано са научне основе можемо констатовати да је проблематика нашег истраживања оправдала свој теоријски, практични и друштвени значај. Теоријски значај саткан је у тежњи за увођењем проблемске наставе у наставни процес који доприноси остваривању услова за стицање квалитетних, функционалних, ефикасних и трајних знања. Значај имају и дизајнирани модели који су чинили структуру експерименталног програма који одговарају тенденцијама савременог математичког образовања, а чији су позитивни ефекти проверени путем адекватних статистичких метода.

Практични значај базиран је на истраживању ефеката проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања. С обзиром да у пракси и даље живи традиционални приступ у коме се ученик налази у улози пасивног објекта у наставном процесу, можемо рећи да позитивни ефекти који су постигнути спровођењем проблемске наставе на часу математике упућују и на смернице уз помоћ којих се наставни процес може отргнути из крутих оквира традиционалног приступа и одговорити захтевима данашње методике. Пошто савремени токови почетне наставе математике захтевају реорганизацију наставних метода и правила у духу пропагирања наставе која је усмерена на ученика, јасно се остварује потреба за увођењем иновативних модела, у нашем случају проблемске наставе, који ће целокупан наставни процес подићи на виши ниво. Сваки начин рада који од ученика захтева самосталност у размишљању и приступу проблемима пред којима се нађу, ученику омогућава лакше, брже и боље сналажење, али и прилагођавање друштву које се брзо мења. Након извођења експерименталног програма ученици су показали адекватну сналажљивост у: самосталном приступу различитим проблемима, сагледавању проблема са различитих становишта, модификовању проблема и осмишљавању релевантних стратегија које су им осветљавале пут до њиховог решења.

Целокупан процес подстицања и реорганизације мисаоних процеса ученика, огледао се кроз активности које су ученике наводиле да негују критичко и стваралачко мишљење с једне стране, односно превазилажење шаблонског начин размишљања, с друге стране. Како би се лакше адаптирали на бројне друштвене промене које су оличење данашњице, ученици проблеме не могу решавати по шаблону, већ им морају приступити критички сагледавајући их са различитих аспеката. Тиме је оправдан друштвени значај овог истраживања.

Неке од захтева које пред нас ставља савремена васпитно-образовна пракса могуће је остварити путем низа препорука које произилазе из нашег истраживања, а директно су везане за извођење наставног процеса и огледају се у следећем:

1) Наставни процес треба обогатити спровођењем проблемске наставе. Реализација наставе путем неког иновативног модела рада као што је у нашем случају проблемска настава има позитиван утицај на ученике како у процесу самог стицања знања тако и у ситуацијама примене и трансфера знања у новим ситуацијама са којима се ученици срећу. Етапе које подразумева проблемска настава (стварање проблемске ситуације и формулисање проблема, формирање хипотеза, декомпозиција проблема, решавање проблема, анализа резултата, извођење закључака и генерализација и практична примена нових знања) с обзиром на своју комплексност, код ученика подржавају висок ниво активности. Стање у данашњем образовању потврђује нам чињеницу да се проблемска настава још увек није уселила у многе учионице, на основу чега можемо закључити да се споменути наставни систем још увек не третира као општеприхваћен вид савремене наставе. Међутим, с обзиром на ефикасност коју остварује у наставном процесу, можемо са сигурношћу рећи да овај вид наставне неће остати само теорија, него ће доживети и висок степен практичне примене. Спровођење проблемске наставе на часу математике код ученика позитивно делује на развој когнитивног, психомоторног и афективног домена. Када је реч о когнитивном домену и утицају проблемске наставе, ученик ће бити у стању да примењује научено у новим и конкретним ситуацијама, што је одлика вишег нивоа разумевања. Такође, показује развијену способност за анализу, синтезу и евалуацију. Психомоторни домен ученика проблемска настава негује у духу подстицања развоја креативности, моделовања, дизајнирања, обликовања, адаптирања и модификовања, док у афективном домену ученике навикава да активно учествују у дискусијама на часу, показују способност за решавање проблема, надограђују своје организацијске способности у смислу систематског планирања решавања проблема и показују мотивацију и самопоуздање када раде самостално. Значај проблемске наставе у наставном процесу можемо објаснити и кроз висок степен корелације са пројектном наставом која је данас све чешћа тема бројних акредитованих семинара и програма обуке наставника који треба да заступају идеје савременог васпитно-образовног процеса.

2) Ученике адекватно подстицати да буду што активнији учесници у наставном процесу. Свака врста подстицаја и мотивације како унутрашње, тако и спољашње на ученике има позитиван утицај и помаже им да покажу интересовање за проблем са којим треба да се суоче. Сваки вид похвале и награде ученику даје додатни стимуланс нарочито у ситуацијама када ученик помисли да је нешто немогуће, бескорисно, нерешиво и сл. Ученика је важно похвалити за сваки делић доприноса који пружи на часу, јер свако дете има различите способности, могућности и склоности, те их је неопходно уважавати. Проблем је решив уколико ученик од самог почетка покаже интересовање за исти и у томе истраје. Ученике у 21. веку треба подстицати да: (1) препознају проблеме; (2) истражују; (3) дискутују са другим ученицима и износе аргументе који оправдавају валидност сопствених резултата (на тај начин се развијају комуникацијске вештине и социјализација); (4) самостално изводе закључке. Ако је ученик активан учесник наставног процеса, а не пасиван слушалац, проценат успешности решавања неког проблема значајно је већи.

3) Пред ученике постављати проблемске ситуације које имају реалистичан контекст. Да би ученик најпре разумео задату проблемску ситуацију и препознао проблем, важно је да она буде део његовог реалног живота. Дизајн проблемских ситуација увек треба прилагодити свакодневном животу ученика како би он могао да пронађе или осмисли стратегију неопходну за њено решавање, а потом и да процени исправност решења и поступак решавања.

Уважавајући процес математизације (хоризонталне и вертикалне) као кључну одлику реалистичног приступа, код ученика ће се развити способности одговорне за претапање проблема из реалног света у математички свет симбола, али и способности које су одговорне за адекватно кретање у свету симбола и откривање узрочно-последичних веза између истих. У складу са идејом вертикалне математизације сматрамо да је важно улагати сличне напоре у даљем школовању ученика (у наредним разредима) када је реч о организацији наставног процеса, како би се поспешео ефекат трансфера и трајности знања.

4) Важно је код ученика оснаживати и развијати способност математичког моделовања. Један од циљева које је потребно остварити у основном математичком образовању, а који прописује програм основношколске математике наше земље, заправо је развој способности математичког моделовања. Споменутој способности важно је развијати како би ученици били успешни да своја математичка знања користе у различитим животним ситуацијама, потом да би развијали свој ментални домен и постали свестрано развијена личност. Математичко моделовање је одговорно за максимално активирање ученика у наставном процесу, што укључује и додатни подстицај који је ученицима потребан за развој критичког и стваралачког мишљења. У нашем истраживању спровођење проблемске наставе у пракси показало се као врло ефикасан метод који утиче на развој способности математичког моделовања. Ученике треба навикавати на различите моделе, јер сваки модел може бити визуелна представа која ће олакшати разбијање апстрактности неке информације. Моделу су врло корисни у наставном процесу јер потпомажу интеграцију знања, неговање постојећих знања и олакшавају разумевање информација у новим ситуацијама. Развијена способност математичког моделовања ученицима олакшава да: (1) задати проблем сагледају са различитих аспеката; (2) адекватно осмисле релевантну стратегију за његово решавање; (3) успешно спроведу одабрану идеју која води до решења проблема; (4) провере тачност решења; (5) врше генерализације. Способност математичког моделовања важно је развијати од раног школског узраста, како би се ученицима у наредним фазама школовања обезбедила адекватна потпора при сусрету са комплекснијим проблемима.

5) Решавати проблеме који су у вези са иконичким представама једначина и неједначина. Решавање једначина и неједначина по унапред утврђеним шаблонима код ученика врло често изазива развијање механизма механичког учења, без разумевања, што није у складу са савременим тенденцијама математичке праксе. Како би ученик изградио свој шири опсег знања важно га је оспособити да схвати да једначине и неједначине не морају увек бити строго задате у симболичкој форми, већ могу имати и свој иконички облик. Ученици 4. разреда основне школе који су били део експерименталног програма у нашем истраживању, показали су висок ниво интересовања, али и знања, када је било потребно одређене једначине/неједначине трансформисати из иконичког у симболичко окружење и обрнуто. Осим што су на тај начин поспешили развој способности математичког моделовања, тим путем су научили и да одређени проблем сагледају са различитих аспеката.

С обзиром на све до сада речено можемо констатовати да су теоријске поставке наше проблематике у јакој корелацији са стручним (методичким) импликацијама спроведеног истраживања, те се међусобно прожимају и допуњују. Наше истраживање оправдало је и потврдило претпоставку да је проблемска настава врло ефикасан наставни систем који има позитиван утицај на развој способности математичког моделовања код ученика 4. разреда основне школе.

Међутим, теоријско становиште нам потврђује да проблемска настава има врло широку примену у настави математике и одговорна је за развој и подстицање не само критичког и стваралачког мишљења, већ свој позитиван удео има и у развоју апстрактног и логичког мишљења. Такође, овај наставни систем своју делотворност испољава и код развоја различитих облика мисаоних операција (анализа, синтеза, апстракција, генерализација, компарација, идентификација, диференцијација).

С обзиром на широк дијапазон позитивних ефеката који су приписани проблемској настави у почетној настави математике, а који нису били у домену нашег истраживања отварају се путеви за нека нова истраживања где се конкретно може испитати утицај проблемске наставе на развој на неки од наведених облика мисаоних процеса. Такође, значајно би било испитати и ефекте неког другачијег наставног система у развоју способности математичког моделовања. Но, даље идеје на разматрање оставићемо као задатак неком будућем заинтересованом истраживачу.

2. Закључци

Савремена васпитно-образовна пракса залаже се за повећање квалитета и ефикасности математичког образовања у смислу потенцирања што веће активности ученика која ће допринети стицању знања која су трајна и применљива у различитим животним сферама. Обогаћивање наставног процеса различитим наставним системима управо је један од фактора који ученицима пружа могућност да своја знања учине трајним и применљивим, а своје учење разумљивим и квалитетнијим.

Разматрајући релевантно теоријско полазиште у овом истраживању дошли смо до закључка да кључне карактеристике проблемске имају позитиван утицај на развој ученичких компетенција и способности неопходних за функционисање и опстанак у друштву 21. века. Овај наставни систем код ученика активира сложене мисаоне процесе које стварају потребе за самосталним истраживачким активностима. Многобројни проблеми са којима се ученици сусрећу врло често захтевају студиозно разматрање и максимално мисаоно ангажовање за решавање. С тим у вези за ученике је врло важно да се могу ослонити на претходна искуства, на способност математичког моделовања и на повезивање одређеног проблема са реалним ситуацијама.

Основни циљ којим смо се водили био је да експерименталним путем испитамо ефекте проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања. Да проблемска настава представља ефикасно средство у развоју способности математичког моделовања, односно да постоји евидентна разлика у оствареном успеху ученика између експерименталне и контролне групе, и то у корист ученика који су били под утицајем експерименталног програма, била је општа хипотеза нашег истраживања, која је потврђена. С обзиром на општу хипотезу формирали смо и шест посебних хипотеза од којих смо првих пет проверили путем статистичке анализе података (Колмогоров-Смирнов тест, анализа варијансе и Mann Whitney U тест), док смо последњу, шесту, хипотезу која се односила на испитивање ставова ученика у вези са улогом и значајем проблемске наставе на часу математике, проверили уз помоћ спроведеног интервјуа са ученицима који су били под утицајем експерименталног програма.

Проверу прве посебне хипотезе пружио нам је иницијални тест, док су друга, трећа и четврта посебна хипотеза проверене помоћу садржаја са I финалног теста. Пета посебна хипотеза проверена је након II финалног теста.

Прва посебна хипотеза (H_1) чинила је претпоставку да не постоје статистички значајне разлике између оствареног успеха ученика експерименталне и контролне групе након решавања иницијалног теста. Ова хипотеза је потврђена путем анализе варијансе јер разлике између експерименталне и контролне групе на иницијалним тесту с обзиром на укупан скор нису биле статистички значајне, ради чега није било потребе вршити интервенције за уједначавање група. На иницијалном тесту ученици су решавали једноставне једначине и неједначине, сложене једначине и неједначине, састављали су адекватан текст на основу задатих иконичких и симболичких представа једначина и неједначина, те су имали прилику и да покажу ниво свог знања у тематској области која је била изван једначина и неједначина, а односи се на идеју функције. Добијени резултати показали су да су ученици и контролне и експерименталне групе имали највише потешкоћа приликом: (а) представљања симболичког записа једначина адекватном иконичком представом; (б) решавања неједначина уз помоћ табеле; (в) састављања одговарајућег текста на основу иконичких и симболичких представа и (г) уочавања правила на основу кога је попуњена одређена табела која је била одраз идеје функције.

С обзиром на наведене категорије потешкоћа са којима су се ученици сусрели на иницијалном тесту, током анализе резултата на првом и другом финалном тесту део наше пажње био је усмерен на проверу успешности ученика (експерименталне и контролне групе) у превазилажењу истих. Сваки претходно представљени облик потешкоће објаснили смо компаративном анализом процентуалних вредности успешности њиховог превазилажења између ученика обе групе. На првом и другом финалном тесту ученици који су били под утицајем експерименталног програма показали су знатно већи ниво успеха у односу на ученике контролне групе када је било потребно задате једначине транспоновати из симболичког облика у иконички, неједначине решити помоћу табеле, саставити текст на основу задате (симболичке или иконичке представе) једначине или неједначине, али и када је било потребно извести одређена правила и закључке који су били у вези са идејом функције. Спровођење проблемске наставе на часовима математике ученицима је омогућило да отклоне бројне недоумице и грешке које су биле евидентне пре уведеног Модела. За разлику од ученика експерименталне групе, ученици који су били под утицајем традиционалног приступа (контролна група) константно су испољавали исте потешкоће у сваком од спроведених тестова.

Друга посебна хипотеза (H_2) која је имала за циљ да покаже да реализација проблемске наставе у великој мери утиче на развој способности математичког моделовања код ученика четвртог разреда основне школе, приликом решавања једноставних једначина и неједначина, такође је потврђена. Ову хипотезу испитали смо помоћу Mann-Whitney-евог U теста и дошли смо до закључка да статистички значајне разлике на нивоу 0,05 између експерименталне и контролне групе у свим варијаблама постоје и да су те разлике биле у корист експерименталне групе која је била под утицајем модела (problemске наставе).

Трећа посебна хипотеза (H_3) говори о томе да су ученици без потешкоћа решавали сложене једначине и неједначине применом математичког моделовања, након спровођења проблемске наставе.

Истинитост ове хипотезе потврдили смо такође путем Mann-Whitney-евог U теста и закључили да су ученици експерименталне групе показали већи ниво знања и већи ниво развијене способности математичког моделовања при решавању сложених једначина и неједначина, у односу на ученике контролне групе која није била под утицајем модела.

Ученици из експерименталне групе показују знатно већи успех у односу на ученике из контролне групе при састављању текстуалних задатака у вези са једначинама и неједначинама на основу задатих икониких и симболичких представа, била је четврта посебна хипотеза (H_4) нашег истраживања, која је такође потврђена. Непараметарски Mann-Whitney-ев U тест показао је да постоје статистички значајне разлике између ученика контролне и експерименталне групе на нивоу значајности 0,05.

Пета посебна хипотеза (H_5) била је претпоставка да ученици који су били под утицајем експерименталног програма показују виши ниво знања у домену решавања задатака изван тематских области једначина и неједначина у односу на ученике контролне групе. Истинитост ове хипотезе је потврђена након спроведеног II финалног теста, чији су резултати обрађени такође помоћу Mann-Whitney-евог U теста који су показали да постоје статистички значајне разлике између контролне и експерименталне групе, односно да су разлике биле у корист експерименталне групе која је показала доста већи ниво знања с обзиром на контролну групу.

Најзад, шеста посебна хипотеза (H_6) истиче да су ставови ученика експерименталне групе у вези са ефектима које остварује проблемска настава на часу математике позитивни, такође је потврђена. Како бисмо испитали ову хипотезу креирали смо протокол интервјуа који је спроведен са ученицима након уведеног Модела (проблемске наставе). Анализом одговора ученика испитали смо: (1) однос ученика према настави математике; (2) ставове ученика у вези са имплементацијом проблемске наставе; (3) и мишљења ученика у вези са задацима који су били део проблемске наставе на часу математике. Поштујући наведену структуру, можемо истаћи да ученици: увиђају значај математике и важност њене примене у животу и показују изузетна интересовања за часове на којима је спроведена проблемска настава, јер су им ти часови: несвакидашњи, нови и занимљиви. Сматрамо да свака новина која се уведе у наставни процес (у нашем случају проблемска настава) и успешно га одвоји га од крутих предавачких оквира на ученике делује врло стимулативно у духу побуђивања знатижеље која утиче на активирање истраживачких нагона.

Када је реч о задацима који су били срж часова проблемске наставе ученици су објашњавали да им је на почетку било најтеже прилагодити се сликовним (иконицим) приказима једначина и неједначина, али како је време текло такве потешкоће су се полако превазилазиле и управо они задаци које су ученици етикетирали као „најтеже“ испоставило се да су им управо такви задаци били и најзанимљивији. Ученицима експерименталне групе заправо је било врло инспиративно да се суоче са различитим баријерама са којима су се сусретали у њима „тешким“ задацима, те су на тај начин показивали и развијали такмичарски дух. На основу сагледаних и анализираних одговора ученика које смо добили путем интервјуа дошли смо до закључка да је имплементација проблемске наставе на часу математике потврдила своју ефикасност, а самим тим ученицима омогућила да самостално истражују, размишљају, трансформишу, модификују, креирају и сл., што им је било врло мотивишуће.

Такође, руководећи се методом квалитативне анализе извршили смо циљано посматрање и анализу активности (одабраних) ученика на часовима проблемске наставе и тиме употпуни теоријске основе проблемске наставе у смислу њеног позитивног дејства на ученика у наставном процесу. Дакле, ученике које смо одабрали да посматрамо током имплементације овог наставног система на часу математике испољили су: висок ниво мотивације, знатижеље, интересовања, ангажовања, пажње, сарадње и многобројних мисаоних активности одговорних за активацију најсложенијих мисаоних процеса. Међутим, оно што је за праксу важно, а теорија потврђује, огледа се у чињеници да имплементација проблемске наставе у наставном процесу у великој мери доприноси обогађивању истог. Пошто проблемска настава своју најширу примену има у настави математике у том смислу не би је требало запоставити и не искористити све предности које пружа.

Иако савремена методика почетне наставе математике подразумева спровођење наставног порцеса у чијем се фокусу налази доминантна активност ученика, видели смо да у пракси увек постоји изузетак. Час који смо посматрали у групи која је била изван утицаја експерименталног програма имао је одлике класичне тардиционалне наставе, што значи да она и даље живи у нашем математичком образовању. На основу свих анализа и резултата до којих смо дошли закључујемо да традиционални приступ неадекватно делује на развој способности математичког моделовања, најпре што су ученици контролне групе показали знатно нижи ниво знања на финалним тестовима у односу на експерименталну групу, а потом и што такав приступ заступа доминантну предавачку улогу наставника која код ученика спутава активирање истраживачких способности, нарушава мотивацију за рад и негује репродуктивни ниво знања.

С обзиром на све до сада речено извешћемо општи, свеобухватни закључак да је наше истраживање *Ефекти проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања* оправдано исказало потребу да се дубље и студиозније истражи, јер смо путем нашег експеримента дошли до нове информације која потврђује позитивне ефекте проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања. Као што смо већ раније истакли, сада додатно потврђујемо да је проблем нашег истраживања оправдао свој научни, практични и друштвени значај.

ЛИТЕРАТУРА

1. Amalia, E., Surya, E., & Syahputra, E. (2017). The effectiveness of using problem based learning (PBL) in mathematics problem solving ability for junior high school students. *Internation Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education*, 3(2), 3402–3406.
2. Anderson, J. R. (2005). *Cognitive psychology and its implications (6th edition)*. New York: Worth.
3. Андрић, В., Јовановић, М., Ћировић, В. и Марковић, М. (2016). *Математички задаци, њихова класификација и неке методе њиховог решавања*. Државни семинар о настави математике и рачунарства у основним и средњим школама. Београд: Друштво математичара Србије.
4. Антонијевић, Р. (2008). Интелектуално васпитање у проблемској настави. *Образовање и учење претпоставке европских интеграција* (23–34). Београд: Институт за педагогију и андрагогију Филозофског факултета.
5. Арбунић, А. и Костовић - Врањеш, В. (2007). Настава и извори знања. *Одгојне знаности*, 9 (2 (14)), 86-111.
6. Arends, R. I. (2012). *Learning to teach* (Ninth Edit). New York, US: McGraw Hill Book.
7. Arnhaјm, R. (1985). *Vizuelno mišljenje (jedinstvo slike i pojma)*. Beograd: Univerzitet umetnosti.
8. Арсић, М. (1995). Образовање путем решавања проблема. Београд: АГЕНА.
9. Aquino, G. V. (1998). *Curriculum Planning for Better Schools, 2nd edition*. Manila: Rex Printing Bilbao.
10. Баковљев, М. (1992). *Дидактика*. Београд: Научна књига.
11. Банђур, В. (2007). *Савремени модели рада у настави природе и друштва*. Источно Сарајево: Филозофски факултет.
12. Barbosa, J. C. (2002). Modelagem matemática e os futuros professores. In: *REUNIÃO ANUAL DA ANPED*, 25., Cachambu.
13. Barbosa, J. C. (2006). *Mathematical modelling in classroom: a critical and discursive perspective*. ZDM, 38 (3), 293-301.
14. Барановић, Б., Штибрић, М. и Чизмешаја, А. (2010). Мишљење учитеља и наставника математике о настави математике у основним и средњим школама у Хрватској - резултати емпиријског истраживањаведеног на Трећем конгресу наставника математике. *Зборник радова-Четврти конгрес наставника математике*, Загреб : Хрватско математичко друштво и Школска књига , 45-46.
15. Barron, B. J. et al. (1998). Doing with the understanding: Lessons from research on problem and project-based learning. *The Journal of the Learning Sciences*, 7, 271–311.
16. Barron, C., Lambert, V., Conlon, J., & Harrington, T. (2008). “The Child’s World”: a creative and visual trigger to stimulate student enquiry in a problem based learning module. *Nurse Education Today*, 28(8), 962–9.
17. Бауцал А., Павловић-Бабић Д. (2010). *PISA 2009 у Србији: први резултати*. Институт за психологију Филозофског факултета у Београду, Центар за примењену психологију, Београд, стр. 80.
18. Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. In C. Kieran (Ed.), *New perspectives on school algebra: Papers and discussions of the ICME-7 Algebra Working Group (special issue)*. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 41-73.
19. Birgili, B. (2015). Creative and critical thinking skills in problem-based learning environments. *Journal of Gifted Education and Creativity*, 2(2), 71–80.

20. Blanco, L. J. & Garrote, M. (2007). Difficulties in learning inequalities in students of the first year of pre-university education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 3, 221–229.
21. Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5. In B. J. Dougherty & R. M. Zbiek (Eds.), *Essential understandings series*. National Council of Teachers of Mathematics: Reston, VA.
22. Blum, W. & Niss, M (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction. In *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.
23. Blum, W. (1994). Mathematical modeling in mathematics education and instruction. In T. Breiteig, I. Huntley & G. Kaiser-Messmer (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context* (pp. 3-14). Chichester, England: Ellis Horwood Limited.
24. Blumenfeld, P.C., Soloway, E., Marx, R. W., Krajcik, J. S., Guzdial, M., & Palincsar, A. (1991). Motivating project-based learning: Sustaining the doing, supporting the learning. In: *Educational Psychologist*, 26, 369-398.
25. Богнар, Л. и Матијевић, М. (2002). *Дидактика*. Загреб: Школска књига.
26. Boero, P. & Bazzini, L. (2004). Inequalities in Mathematics Education: The need for Complementary Perspectives. In Hoines, M. J. and Fuglestad, A. B. (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (1,139–142). Bergen, Norway.
27. Booth, L. R. (1986). Difficulties in algebra. *Australian Mathematics Teacher*, 42(3), 2-4.
28. Бранковић, Д. (1999). *Интерактивно учење I*, стр. 109-131. Бања Лука: Министарство просвете Републике Српске.
29. Бранковић, Д. (1999). Интерактивно учење у проблемској настави. *Интерактивно учење*. Бања Лука.
30. Brizuela, B., & Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, 24(2), 33–40.
31. Brizuela, B., Blanton, M., Sawerey, K., Newman-Owens, A. & Gardiner, A. (2015). Children's Use of Variables and Variable Notation to Represent Their Algebraic Ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, Vol. 17: 34-63.
32. Bruder, R. (2002). Lernen geeignete Fragen zu stellen. *Heuristik im Mathematikunterricht, mathematik lehren*, 115, 4 -8.
33. Bruner, J. S. (1961). The Act of Discovery, *Harvard Educational Review*, No 31.
34. Брунер, Џ. (1976). Процес образовања. Београд: *Педагогија*, бр. 2/76.
35. Будински, Н. (2013). Могућности за побољшање функционалног знања ученика применом моделирања и хеуристичког резонувања у настави математике. *Иновације у настави*, XXVII, 3, (123-134). Београд: Учитељски факултет.
36. Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 63-75.
37. Van de Geer, J.P. (1966). *A Psychological Study of problem Solving*. New York: Unitegerevij de Toorts Haarlam.
38. Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9, Utrecht: Utrecht University.
39. Velten, K. (2009), *Mathematical Modeling and Simulation: Introduction for Scientists and Engineers*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim.
40. Вергелес Г. и., Денисова А. А. (2014). *Технологии обучения младших школьников*. Санкт Петербург: Издательство ВВМ, 218с.

41. Verikios, P. & Farmaki, F. (2008). Approaching the inequality concept via α functional approach To school algebra in a problem solving context. In Gagatsis, A. (Eds.), *Research in Mathematics Education* (191–205). Nicosia – Cyprus.
42. Verschaffel, L., Greer, B. and De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.
43. Вилотијевић, М. (1999). *Дидактика 1 - предмет дидактике*. Београд: Научна књига и Учитељски факултет.
44. Вилотијевић, М. (1998). *Врсте наставе*. Београд: Учитељски факултет.
45. Вилотијевић, М. (2001). *Дидактика*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
46. Вилотијевић, М. и Вилотијевић, Н. (2016). *Модели развијајуће наставе*. Београд: Учитељски факултет.
47. Вилотијевић, Н., Вилотијевић, М. (2010). *Пројектна настава*. Београд: Центар за образовну технологију.
48. Вуковић, В. (1996). *Основи методике наставе математике*. Јагодина: Учитељски факултет.
49. Vygotsky L. S, (1985). *Arbeiten zu theoretischen und methodologischen Problemen der Psychologie* [Works concerning the methodological problems of psychology] (Vol. 1). Edited by J. Lompscher. Berlin.
50. Gainsburg, J. (2006). The mathematical modelling of structural engineers. *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 8, no.1, pp. 3-36.
51. Гајић, О. (2004). *Проблемска настава књижевности у теорији и пракси*. Нови Сад: Филозофски факултет.
52. Galbraith, P. (2012). Models of modelling: genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(5), 3-16.
53. Gallagher, S. A. (2015). The role of problem-based learning in developing creative expertise. *Asia Pacific Education Review*, 16(2), 225–235.
54. Galjperin P.J, (1972). О истраживању интелектуалног развоја детета. *Психологија*, vol. 5, br. 1-2, str. 113-123.
55. Garcia, R. & Piaget, J. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. New York: Columbia University Press.
56. Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD- β Press / Freudenthal Institute.
57. Gravemeijer, K. and Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, 32 (6), 777–796.
58. Gravemeijer, K. (2002). Preamble: From models to modeling. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 7-22). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
59. Gravemeijer, K., & Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 145-169). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
60. Даутова О. Б. (2014). Технологија проблемног учења. *Современе педагошке технологије основне школе у условима ФГОС*. Санкт Петербург: КАРО, с. 42-58.
61. Дејић, М. (1996) *Методичка трансформација одабраних садржаја нумеричке математике*. Вршац: Виша школа за образовање васпитача.
62. Дејић, М. (1998). Кратак осврт на проблемску наставу. *Наша школа*, 1-2, 104-121.
63. Дејић, М. (2000). *Методика наставе математике*. Јагодина: Учитељски факултет.

64. Дејић, М. и Егерић, М. (2003). *Методика наставе математике*. Јагодина: Учитељски факултет .
65. Dejić, M. i Egerić, M. (2007). *Metodika nastave matematike*. Beograd: Učiteljski fakultet.
66. Дејић, М. и Егерић, М. (2010). Методика наставе математике. Београд: Учитељски факултет.
67. Дејић, М. и Ћебић, М. (2010). Образовање васпитача у области методике развоја математичких појмова. *Образовање и усавршавање наставника – дидактичко-методички приступ*. Учитељски факултет у Ужицу, стр. 339–356.
68. Di Sessa, A. A. (2002). Students' criteria for representational adequacy. In: Gravemeijer, K., Lehrer, R., Van Oers, B. and Verschaffel, L. (Eds.). *Symbolizing, modelling and tool use in mathematics education* (105–130). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
69. Дјуи, Џ. (1970). *Васпитање и демократија*. Цетиње: Обод.
70. Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A Modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal of Research in Mathematics Education*, 34 (2), 110–136.
71. Doorman, L. M., & Gravemeijer, K. (2009). Emerging modeling: Discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 302-310.
72. Doosti, A. and Ashtiani, A. M. (2009). Mathematical Modeling: a new approach for mathematics teaching in different levels. *Produtos Educacionais no ensino de Fisica e de Matematica*. Посећен 8. 01. 2019. http://www.enrede.ufscar.br/participantes_arquivos/E4_Ashtiani_TC.pdf
73. Dochy, F., Segers, M., Bossche, P. Van Den & Gijbels, D. (2003). Effects of problem-based learning : a meta- analysis. *Learning and Instruction*, 13, 533–568.
74. Dreyfus, T. and Hoch, M. (2004). Equations – A Structural Approach. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (I, 152–155). Bergen, Norway.
75. Думбовић, И. (2005). *Енциклопедија, педагози значајни за праксу и теорију одгоја*. Лекеник.
76. Duncker, K. (1945). On problem-solving (L. S. Lees, Trans.). *Psychological Monographs*, 58(5), i-113.
77. Дураковић, М. (1985). *Развијање стваралачких способности у проблемско-креативној настави*. Пула: Истарска накнада.
78. Ђерић, И., Станчић, М. и Ђевић, Р. (2017). *TIMSS 2015 – Квалитет наставе и постигнућа ученика у математици и природним наукама*. Београд: Институт за педагошка истраживања.
79. Ђокић, О. (2014). Реално окружење у почетној настави геометрије. *Иновације у настави - часопис за савремену наставу*, 27(2), 7-21.
80. Ђорђевић, Ј. (1981) *Савремена настава*. Београд: Научна књига.
81. Ђорђевић, Ј. (1997). *Настава и учење у савременој школи*. Београд: Учитељски факултет.
82. Егерић, М. (2001). Мотивација у настави математике. *Настава и васпитање* (1), 36-46.
83. Eigler, G. & Judith, H. (1973). *Grundkurs Lehren und Lernen*. Weinheim/ Basel.
84. English, L. D. (2003). Reconciling theory, research, and practice: A models and modelling perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 2 & 3, 225-248.
85. English, L. D., & Watters, J. J. (2004). Mathematical modelling with young children. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International PME Conference* (pp. 335-342). Bergen: Bergen University College.
86. English, Lyn D. & Watters, James J. (2005). Mathematical Modelling with 9-year-olds. In Chick, Helen L. & Vincent, Jill L. (Eds.) *29th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, July 10-15, 2005, Melbourne, Australia.

87. Erbaş, A. K., Kertil, M., Çetinkaya, B., Çakıroğlu, E., Alacacı, C. & Baş, S. (2014). Mathematical modeling in mathematics education: Basic concepts and approaches. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 14(4), 1607–1627.
88. Erden, M. & Akman, Y. (1998). *Education Psychology*. Ankara: Arkadas Press .
89. Заботин, В. В. (1971). Развивање способности ученика за уочавање и решавање проблема. *Настава и васпитање*, 20(4), 415-430.
90. Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања (2011). *Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања за предмет Математика*, Београд.
91. Зверова, Н. М. (1980). *Активизациј мишљењују ученихују на уроках физики*. Москва.
92. Зељић, М. (2011). Проблем разумевања структуре и поступка решавања једначина у основношколској алгебри. *Иновације у настави*, XXIV, 1, 39-52. Београд: Учитељски факултет.
93. Zeljić, M. (2013). Metodčki pristup nejednačinama u udžbenicima za treći razred osnovne škole. *Inovacije u nastavi*, XXVI (3), 24–35.
94. Зељић, М. (2014). *Методички аспекти ране алгебре*. Београд: Учитељски факултет.
95. Zech, F. (1999). *Grundkurs Mathematikdidaktik - Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*, Beltz Verlag Weinheim und Basel.
96. Zlokap, B. (2012). Matematičko modelovanje u obrazovanju- problemi i prednosti. *Istraživanje matematičkog obrazovanja* ,XVIII(1), стр. 33-42.
97. Izard, J., Haines, C., Crouch, R., Houston, K., & Neill, N. (2003). Assessing the impact of teachings mathematical modeling: Some implications. In S. J. Lamon, W. A. Parker, & S. K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life ICTMA 11* (pp. 165-177). Chichester, UK: Horwood Publishing.
98. Јанковић, С. (2016). Примена проблемске наставе у реализацији садржаја почетне наставе математике. *Годишњак*, VII, (363-374). Врање: Педагошки факултет, Универзитет у Нишу.
99. Jonassen, D. & Tessmer, M. (1996). *An outcomes-based taxonomy for the design, valuation, and research on instructional systems*. Training Research Journal.
100. Jones, G., Langrall, C., Thornton, C., & Nisbet, S. (2002). Elementary school children's access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 113-142). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
101. Јукић, С. А., Лазаревић, Ж. и Вучковић, В. (1998). *Дидактика - избор текстова*. Јагодина: Учитељски факултет.
102. Јукић, С. (2001). *Настава у којој ученик мисли*. Вршац: Виша школа за образовање васпитача.
103. Julie, C., & Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In W. Blum, P. Galbraith, M. Niss, & H.-W. Henn (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 503-510). New York, NY: Springer.
104. Kadum, V. (2005). *Učenje rješavanjem problemskih zadataka u nastavi matematike*. Pula: Igsa Pula.
105. Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 302-310.
106. Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann et al. (Eds.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (pp. 66-84). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

107. Kaiser, G. (2006). Introduction to the working group “Applications and Modelling”. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)* (pp. 1613-1622). Sant Feliu de Guíxols, Spain: FUNDEMI IQS, Universitat Ramon Llull.
108. Kaiser-Messmer, G. (1991). Application-orientated mathematics teaching: a survey of the theoretical debate. In: NISS., BLUM, HUNTLEY (ed.), Chichester: Ellis Horwood.
109. Кајић, Р. (1981). *Роман у саставу проблемске наставе*. Загреб: Школска књига.
110. Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M. and Heckler, A. F. (2008). The advantage of abstract examples in learning math. *Science*, 320, 454–455.
111. Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.
112. Kaput, J. J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. In Chick, H., Stacey, K., Vincent, J., & Vincent, J. (2001). *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference (Eds.) The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. (Vol. 1, pp. 344-352). University of Melbourne.
113. Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.
114. Kaput, J. J. (2000). *Teaching and Learning a New Algebra with Understanding*. Opinion Papers (120), preuzeto 20.01. 2019, sa adrese: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED441662.pdf>
115. Kaput, J. J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? In: J. Kaput, D. Carraher, and M. Blanton (eds.), *Algebra in the Early Grades*, Lawrence Erlbaum Associates/Taylor Francis Group, Mahwah, NJ.
116. Karatas, I. & Baki, A. (2013). The effect of learning environments based on problem solving on students' achievements of problem solving. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 5(3), 249-267.
117. Kasumović, A. i Musić, H. (2010). *Prezentacije sadržaja bosanskog jezika u sistemima nastave*. Tuzla: Ofset.
118. Katz, V. J. (1995). The Development of Algebra and Algebra Education. In Carole B. Lacampagne, William Blair and Jim Kaput (Eds.), *The Algebra Initiative Colloquium* (pp.19-36). U.S. Department of Education Office of Educational Research and Improvement National Institute on Student Achievement, Curriculum, and Assessment, <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED385436.pdf#page=37>
119. Квашчев, Р. (1978). *Примена теорија учења на област наставе и васпитања*. Београд: Привредно финансијски водич.
120. Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317–326.
121. Kieran, C. (1982). *The learning of algebra: A teaching experiment*. Paper presented at the annual meeting of the AREA, New York.
122. Kieran, C. (1988). The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 141-146). Noordwijkerhout, The Netherlands: State University of Utrecht, Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Centre.
123. Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Grouws, D. A. (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (390–419). New York: Macmillan.
124. Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.

125. Kieran, C. (1997). Mathematical concept at the secondary school level: The learning of algebra and functions; In: N. Bednarz, P. Bryant and L. Lee (editors): *Learning and teaching mathematics: An international perspectives*; Psychology Press, 133-158.
126. Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
127. Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up : Helping Children Learn Mathematics*. Washington DC : National Academy Press.
128. Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.
129. Klix, F. (1971). *Information und Verhalten*. Berlin.
130. Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N. and Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (4), 297–312.
131. Костић, А. (2006). *Когнитивна психологија*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
132. Крстић, Ј., (2005): Интерактивна настава применом проблемске наставе. *Образовна технологија*, 3-4, (90-99).
133. Krulik, S. & Rudnick, J. A. (1988). *Problem Solving: A Handbook For Senior High School Teachers*. Boston: Allyn & Bacon.
134. Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1999). *Innovative tasks to improve critical- and creative-thinking skills*. In I. V. Stiff (Ed.), "Developing mathematical reasoning in grades K-12." Reston. VA: National Council of Teachers of Mathematics. (pp.138-145).
135. Крутецкий, В. А. (1972). Основы педагогической психологии. Москва: Просвещение.
136. Kuchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*. 7(4), 23-26.
137. Kurniawan, H. (2016). Efektifitas pembelajaran problem solving dan investigasi terhadap keterampilan berpikir kritis matematis berbantuan Google Classroom. *Jurnal Pendidikan Surya Edukasi (JPSE)*, 2(1), 56–67.
138. Kurnik, Z. (2002). Problemska nastava. *Matematika i škola*, 15, 196-202.
139. Kurnik, Z. (2006a). Heuristička nastava. *Matematika i škola*, 34, 148-153.
140. Kurnik, Z. (2006b). Jezik u nastavi matematike. *Matematika i škola*, 33, 99-105.
141. Khoiriyah, A. J., & Husamah, H. (2018). Problem-based learning: Creative thinking skills, problem-solving skills, and learning outcome of seventh grade students. *JPBI (Jurnal Pendidikan Biologi Indonesia)*, 4(2), 151–160.
142. Kwon O. N., Park J. S. & Park J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, Vol. 7, No. 1, 51 – 61.
143. Lange, J. de (1996). Using and Applying Mathematics in Education. in: A.J. Bishop, et al. (eds). *International handbook of mathematics education*, Part one. 49-97. Kluwer academic publisher.
144. Lapointe, A., Mead, N. & Askew, J. (1992). *Learning Mathematics*. Princeton, NJ: Educational Testing Service.
145. Lee, K., Yeong, S. H. M., Ng, S. F., Venkatraman, V., Graham, S., & Chee, M. W. L. (2010). Computing solutions to algebraic problems using a symbolic versus a schematic strategy. *ZDM —The International Journal on Mathematics Education*, 42, 591–605.
146. Lee, N. H., Yeo, J. S. D., & Hong, S. E. (2014). A metacognitive based instruction for primary four students to approach non-routine mathematical word problems. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 46 (3), 465-480
147. Lester, F. (1994). Musings about Mathematical Problem Solving Research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 , 660-675.

148. Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Origins and evaluation of model-based reasoning in mathematics and science. In R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 59-70). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
149. Lehrer, R., & Schauble, L. (2007). A developmental approach for supporting the epistemology of modeling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modeling and applications in mathematics education* (pp. 153-160). New York, NY: Springer.
150. Lehrer, R., Giles, N. D., & Schauble, L. (2002). Children's work with data. In R. Lehrer & L. Schauble (Eds.), *Investigating real data in the classroom: Expanding children's understanding of math and science* (pp. 1-26). New York: Teachers College Press.
151. Leontiev A. V, (1981). *Problems of the development of mind*. Moscow.
152. Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
153. Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modelling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5, 157-190.
154. Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763-799). Charlotte: National Council of Teachers of Mathematics and Information Age Publishing.
155. Leuders, T. & Maas, K. (2007). Und man braucht sie doch! Die Nützlichkeit von Mathematik erfahrbar machen. *PM Themenheft Praxis der Mathematik*, 49(1).
156. Lewis, R. H. (2000). *Mathematics: The most misunderstood subject*. Accessed 4 January 2019 at <http://www.fordham.edu/mathematics/whatmath.html>
157. Li, X., Ding, M., Capraro, M. M. & Capraro, R. M. (2008). Sources of Differences in Children's Understandings of Mathematical Equality: Comparative Analysis of Teacher Guides and Student Texts in China and the United States. *Cognition and Instruction*, 26, 195-217.
158. Lian, L.H. & Idris, N. (2006). Assessing Algebraic Solving Ability Of Form Four Students. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, Volume 1, Number 1, 55-76.
159. Lindquist, M. (1989). Results from the Fourth Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress. Reston, Va.: *National Council of Teachers of Mathematics*.
160. Lins, R. and Kaput, J. (2001). The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field. In Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. and Vincent, J. (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra, Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (47-70). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.
161. Липковски, А. (2007). *Линеарна алгебра и аналитичка геометрија*. Београд: ЗУНС.
162. Малиновић, Т. и Малиновић-Јовановић, Н. (2002). *Методика наставе математике*. Врање, Учитељски факултет.
163. Малиновић-Јовановић, Н. и Јанковић, С. (2014). Проблемска настава и ефикасност остваривања програмских задатака о једначинама. *Годишњак Учитељског факултета у Врању*, V, 437-451.
164. Малиновић-Јовановић, Н. и Малиновић, Т. (2013). *Методика осавременене наставе математике*. Врање: Учитељски факултет.
165. Мандић, Д. и Вилотијевић, М. (2017). *Управљање развојним променама у васпитно-образовним установама*. Београд: Учитељски факултет, стр. 134-138.
166. Маричић, С. (2006). *Сложеност и комплексност математичког мишљења*. Учитељски факултет Ужице.
167. Марјановић, М. (1996). *Методика математике-други део*. Београд: Учитељски факултет.

168. Marjanović, M. i Zeljić, M. (2006). Solving Inequalities in Primary School. *The teaching of Mathematics*, IX (1), 13–30.
169. Марковић, З. (2011). Математичко моделовање у математичком образовању. *Истраживање математичког образовања*, III (4), 35-50.
170. Marković, V. (2011). Korištenje matematičkog modelovanja otvorenih zadataka pri istraživanju matematičkog obrazovanja. *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, III(4), 17-22.
171. Matijević, M. (2008). Projektно учење и настава. U: *Nastavnički suputnik*. Uredio: Boris Drndarić. Zagreb: Znamen. 188–225.
172. Matijević, M. i Radovanović, D. (2011). *Nastava usmjerena na učenika*. Zagreb: Školske novine.
173. Матюшкин, М. А (1972). *Проблемные ситуации в мышлении и обучении*. Москва.
174. Махмутов, М. И. (1972). *Теория и практика проблемного обучения*. Казань: Таткнигоиздат.
175. Махмутов, М. И. (1975). *Проблемное обучение*. Москва: Педагогика.
176. Махмутов, М. И. (1997). *Организација проблемного обучения*. Москва: Педагогика.
177. Maher, C. & Martino, A. (1996). The Development of the Idea of Mathematical Proof: A Five-Year Case Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 194–214.
178. MacGregor, M. (2001). Does learning algebra benefit most people?. In Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. and Vincent, J. (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra, Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (405–411). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.
179. Mayer, R. E. & Wittrock, M. C. (1996). Problem-solving transfer. In D. C. Berliner & R.C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (47-62). New York: Macmillan.
180. Meerschaert, M. (2010). *Mathematical Modeling*. Elsevier Science.
181. Милијевић, С. (2003). *Интерактивна настава математике*. Бања Лука: Друштво педагога Републике Српске.
182. Милановић, Н. (1988). *Когнитивне теорије и настава*. Београд: Институт за педагошка истраживања.
183. Miličević, S. & Koljančić, M. (2003). *Interaktivna nastava matematike: metodika rada u osnovnoj školi*. Banja Luka: Друштво педагога Републике Српске.
184. Milinković, D. (2003). Modelski pristup diferenciranoj obradi problemskih zadataka. *Norma*, IX(1), 143-153.
185. Милинковић, Д. (2013). *Методика математичког моделовања за разредну наставу*. Пале: Филозофски факултет.
186. Милинковић, Ј. (2007). Реално окружење као извор математичких појмова, у: *Дидактичко - методички аспекти промена у основношколском васпитању*, Учитељски факултет, Београд, стр. 111-117.
187. Milinković, J. (2010). Pupils' active learning in integrated mathematics and technical education class: case study. In *Student in contemporary learning and teaching* (97-109), Beograd: Учитељски факултет.
188. Милинковић, Ј. (2011). Елементи интегративног приступа у уџбеницима. *Иновације у настави*, XXIV, 1, 53-63. Београд: Учитељски факултет.
189. Милинковић, Ј. (2014). Математичко моделовање у наставним системима. *Иновације у настави*, XXVII, 2, 45-55. Београд: Учитељски факултет.
190. Милинковић, Ј. (2016). *Огледи о учењу у настави математике*. Београд: Учитељски факултет.
191. Милинковић, М., Јаблановић- Марушић, М., и Борић-Дабих, М. (2017). *TIMSS 2015-Постигнуће ученика из математике: главни налази, трендови и наставни програм*. Београд: Институт за педагошка истраживања.

192. Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије (2015). *Наставни програм за први циклус основног образовања и васпитања*. <http://www.zuov.gov.rs/poslovi/nastavni-planovi/nastavni-planovi-os-i-ss/>
193. Мишчевић, Г. (2007). Рачунар у функцији проблемске наставе природе и друштва. *Зборник радова са Четвртог међународног симпозијума: Технологија, информатика и образовање*. Нови Сад, 657-661.
194. Moss, J., & London McNab, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 277–301). New York: Springer.
195. Муминовић, Х. (2010). Проблемско учење у настави. *Иновације у настави*, 23 (4), 23–31.
196. Munjiza, E. (2007). *Projektno učenje*. Osijek: Sveučilište Josipa Jurija Strossmayera, Filozofski fakultet, Učiteljski fakultet.
197. National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
198. National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
199. National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
200. Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. In: W. Blum, P. Galbraith, H. Henn & N. Mogens (Eds.). *Modelling and applications in mathematics education, The 14th ICMI Study*. New York: Springer, 3-32.
201. Ничковић, Р. (1968). *Учење у настави и његови ефекти*. Београд: Младо покољење.
202. Ничковић, Р. (1970). *Учење путем решавања проблема у настави*. Београд: Завод за издавање уџбеника.
203. Ничковић, Р. (1971). *Учење путем решавања проблема у настави*. Београд: Завод за издавање уџбеника.
204. Ничковић, Р. (1974) *Настава путем решавања проблема*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
205. Novick, L.R., & Bassok, M. (2005). Problem Solving. In Holyoak, K.J. & Morrison, R.G. (Eds.), *The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning* (pp. 321-350). Cambridge: University Press.
206. Novotná, J. (1997). Phenomena Discovered in the Process of Solving Word Problems. In: Hejny, M. and Novotná, J. (Eds.). *Proceedings ERCME 97* (105–109). Praha: Prometheus.
207. Novotná, J. & Rogers, L. (2003). Word Problems: A Framework for Understanding. In: Rogers, L. and Novotná, J. (Eds.). *Analysis and Teaching. Classroom Contexts. Effective Learning and Teaching of Mathematics from Primary to Secondary School* (79–96). Bologna: Pitagora Editrice.
208. Novotná, J. & Sarrazy, B. (2005). Model of a professor's didactical action in mathematics education: professor's variability and students' algorithmic flexibility in solving arithmetical problems. In: Drouhard, J. P (Ed.). *The Fourth Congress of the European Society in Mathematics Education* (696–705). Retrieved May 25, 2014. from: <http://www.cerme4.crm.es>.
209. Nohda N. (2000). Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Hiroshima, Japan, 39 – 53.
210. Nyala, P., Assuah, C., Ayebo, A., & Tse, N. (2016). The prevalent rate of problem-solving approach in teaching mathematics in Ghanaian basic schools. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 2(2), 444-452.
211. O'Callaghan, B. (1998). Computer-Intensive Algebra and Students' Conceptual Knowledge of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education* 29(1), 21.

212. Обрадовић, Д. Р. и Зељић, М. Ж. (2015). Методе и стратегије решавања текстуалних задатака у почетној настави математике. *Иновације у настави - часопис за савремену наставу*, 28(1), 69-81.
213. Okoń, W. (1964). *U podstaw problemowego uczenia się*. Warszawa: Biblioteka nauczyciela.
214. Павловић-Бабић, Д. и Бауцал, А. (2013). *Подржи ме, инспириши ме. PISA 2012 у Србији*. Београд: Институт за психологију и Центар за примењену психологију.
215. Padmavathy, R. D., & Mareesh, K. (2013). Effectiveness of Problem Based Learning in Mathematics. *International Multidisciplinary e-Journal*, II(I), 45-51.
216. Петровић, Н. (2001). *Математички проблеми у причама*. Нови Сад: Едука.
217. Петровић, Н. и Пинтер, Ј. (2006). *Методика наставе математике*. Сомбор: Педагошки факултет.
218. Петровић, Н., Мрђа, М., Ковачевић, П. (2004). Моделско-проблемски приступ у настави математике, *Норма*, 10(1-2), 111-121. Сомбор.
219. Pehkonen E. (1997). The State-of-Art in Mathematical Creativity. *Fostering of Mathematical Creativity*, Helsinki, ZDM, 63-67. <http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/>
220. Пеcko, L. (2015). Utjecaj problemske nastave na aktivnost učenika u nastavi prirode. *Metodički izbori* 10, (2), 69-88.
221. Пинтер, Ј. (1995). *Математичко-кибернетичко моделовање у почетној настави математике*. Сомбор: Учитељски факултет.
222. Пинтер, Ј., Сотировћ, В., Петровић, Н. и Липовац, Д. (1996). *Опита методика наставе математике*. Сомбор: Учитељски факултет.
223. Pinter, J. (1997). *Matematičko modelovanje u početnoj nastavi matematike*. Sombor:Učiteljski fakultet.
224. Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2014). The predictive nature of algebraic arithmetic for young learners. In Liljedahl, P., Oesterle, S., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (4), 434-441. Vancouver: PME.
225. Polya, G. (1956). *Kako ću riješiti matematički zadatak*. Zagreb: Školska knjiga.
226. Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving, Volume I*, John Wiley and Sons, Inc, New York.
227. Polya, G. (1964). *Die Heuristik. Versuch einer vernünftigen Zielsetzung*, in: MU 1964/1.
228. Polya, G. (1975). *How to Solve It*. Princeton: Princeton University Press.
229. Пољак, В. (1977). *Наставни системи*. Загреб: Педагошко-књижевни збор.
230. Пољак, В. (1985). *Дидактика*. Загреб: Школска књига.
231. Пољак, В. (1989). *Настава. Педагошка енциклопедија*. Београд : Завод за уџбенике и наставна средства и други.
232. Portal, J. & Sampson, L. (2001). *Improving high school students' mathematics achievement through the use of motivational strategies*. Masters of Arts Action Research Project, St. Xavier University.
233. Правилник о наставном плану и програму за први, други, трећи и четврти разред основног образовања и васпитања и наставном програму за трећи разред основног образовања и васпитања (2005). *Просветни гласник*, LIV, 38–41.
234. Правилник о плану наставе и учења за први циклус основног образовања и васпитања и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања (2017). *Просветни гласник*, LXVI (10), 25-28.
235. Правилник о програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања (2018). *Просветни гласник*, LXVII (16), 47-75.

236. Правилник о програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања (2019а). *Просветни гласник*, LXVIII (5), 34-36.
237. Правилник о програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања (2019б). *Просветни гласник*, LXVIII (11), 39-41.
238. Првановић, С. (1958). *Методски приручник за извођење наставе аритметике*. Београд: Библиотека просветних радника Југославије.
239. Првановић, С. (1970). *Методика савременог математичког образовања*. Београд: Завод за издавање уџбеника Социјалистичке Републике Србије.
240. Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, Metaphors, Metonymies and Imaginative Rationality in High School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 595–610.
241. Prescott, J. O. (2001). We love math! *Instructor*, 110, 76, 24-27.
242. Pretz, J. E., Naples, A. J. & Sternberg, R. J. (2003). Recognizing, defining, and representing problems. In J. E. Davidson & R. J. Sternberg (Eds.), *The psychology of problem solving* (3-31). New York, NY, US: Cambridge University Press.
243. Radford, L. (2011). Grade 2 Students Non-symbolic Algebraic Thinking. In E. Cai & J. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 202-322). Berlin-Heidelberg: Springer.
244. Разумовский В. Г. (2004). *Физика в школе. Научный метод познания и обучения* / В. Г. Разумовский, В. В. Майер. - М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС.
245. Рамуљ, К. А. (1963). Психологија мишљења и проблем мишљења, васпитања мишљења.; (превод с руског), у *Педагошка стварност*, Нови Сад, бр.1.
246. Rebello, N. S., Andrew, L. C., Bennett, G., Zollman, D. A. & Ozimek, D. J. (2007). Transfer of Learning in Problem Solving in the Context of Mathematics and Physics. In D. Jonassen (Ed.), *Learning to solve complex scientific problems* (1-36). New York: Lawrence Earlbaum Associates.
247. Resnick, L. (1989). Developing Mathematical Knowledge. *American Psychologist*, 44, 162-169.
248. Riasat, A., Hukamdad, Akhter, A. & Khan, A. (2010). Effect of using problem solving method in teaching mathematics on the achievement of mathematics students. *Social Science*, 6 (2), 67-72.
249. Richardson, K. (2004). *A design of useful implementation principles for the development, diffusion, and appropriation of knowledge in mathematics classrooms*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University.
250. Riedel, K. (1973). *Lehrhilfen zum entdeckenden Lernen*. Hannover.
251. Rijavec, M. (2003). *Psihologija obrazovanja*. Zagreb: IEP – VERN.
252. Robinson, D. (2015). Core maths: a new opportunity. *Journal of Core Maths*, 1(1), 1-8.
253. Романо, Д. А. (2008). Мотиви за изучавање математичког мишљења. *Настава математике*, Београд (3-4), 1-11.
254. Романо, Д. А. (2009а). Истраживање математичког образовања, *Истраживање математичког образовања*, Бања Лука, Вол. 1, број 1, 1-10.
255. Романо, Д. А. (2009б). Теорије математичког образовања, први део: РМЕ-теорија, *Истраживање математичког образовања*, Бања Лука, Вол.1, број 1, 23-35.
256. Рот, Н. (1978). *Опита психологија*. Београд.
257. Rohmah, M. & Sutiarso, S. (2018). Analysis Problem Solving in Mathematical Using Theory Newman. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2), 671-681.
258. Рубинштајн, С. Л. (1981). *О мишљењу и путевима његовог истраживања*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
259. Savery, R. J. (2006). Overview of Problem-based Learning: Definitions and Distinctions. *The Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning*, 1 (1), 9-20.
260. Sadosky, P. & Sessa, C. (2005). The Adidactic Interaction with the Procedures of Peers in the Transition from Arithmetic X. Wang 153 to Algebra: A Milieu for the Emergence of New Questions. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 85-112.

261. Santrock, J. W. (2012). *Educational psychology*. New York, US: University of Texas at Dallas.
262. Сеничић, А., Сеизовић, Б., Петришко, В. и Бошљаковић, Д. (2017). Сингапурска математика. *Настава математике*, LXII, 1–9.
263. Şengül, S., & Erdoğan, F. (2014). A Study on the Elementary Students' Perceptions of Algebra. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 116, 3683– 3687.
264. Симић, К. (2015). *Основе методике наставе*. Брчко: Европски универзитет Брчко дистрикта.
265. Singh, P. (2003). Orientations of School Mathematics in Malaysia. *Jurnal Pendidik and Pendidikan*, 18, 58–64.
266. Skinner, B. F. (1954). *The Science of Learning and the Art of Teaching*, Education Rev. Vol. 24, No. 2, Harvard Education, Massachusetts .
267. Спајић, Н. (2005). О неким питањима припремања и извођења проблемске наставе. *Педагошка стварност*, 51(5-6), 430-441.
268. Sriraman, B. & English, L. (2010). *Theories of mathematics education*. Springe.
269. Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *Mathematics Teacher*, 90(2), 110-113. Retrieved from https://www.learner.org/courses/learningmath/algebra/pdfs/Mathematics_Teacher.pdf
270. Stacey, K., & MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behaviour*, 18(2), 149-167.
271. Стевановић, Б. (1979). *Педагошка психологија*. Београд.
272. Steele, D. & Johanning, D. J. (2004) A Schematic-theoretic View of Problem Solving and Development of Algebraic Thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 57, 65–90.
273. Stillman, G. (2007). *Mathematical Modelling in the Real World*, PowerPoint presentation, Teachers' Training Faculty, Belgrade, Serbia, October 31st.
274. Stillman, G., Brown, J., & Galbraith, P. (2010). Identifying challenges within transition phases of mathematical modelling activities at year 9. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modelling competencies: ICTMA 13* (pp. 385–398). New York, NY: Springer.
275. Stjepanović, I. (2012). Matematičko modelovanje u osnovnoj školi. *Istraživanje matematičkog obrazovanja* . ISSN 1986–518X, стр. 25–29.
276. Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. In Bergeron, J. C., Herscovic, N. and Kieran, C. (Eds.), *Proceedings of Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (III, 162–169). Montreal, Canada: Universite de Montreal.
277. Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 15–39.
278. Shuell, T. (1990). Teaching and learning as problem solving. *Theory into Practice*, 29(2), 102–108.
279. Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., et al. (2003). Algebra in elementary school. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *International conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 127–134). Honolulu: University of Hawaii.
280. Schloeglmann, W. (2004). Routines in non-routine problem solving processes. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (161–168). Bergen: Bergen University College.
281. Schmittau, J., & Morris, A. (2004). The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of V. V. Davydov. *The Mathematics Educator*, 8(1), 60-87.

282. Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (334-370). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.
283. Schwartz, A. E. (2000). Axiom math anxiety. *Education Digest*, 65(5), 62-65.
284. Tai, W. C. & Lin, S. W. (2015). Relationship between problem-solving style and mathematical literacy. *Educational Research and Reviews*, 10(11), 1480-1486.
285. Takahashi A. (2000). Open-ended Problem Solving and Computer Instantiated Manipulatives (CIM). *Topic Study Group 5 at the 9th International Congress on Mathematical Education (ICME-9)*, Tokyo/Makuhari, Japan, Retrieved on November 2018, <http://students.ed.uiuc.edu/takahash/ICME9-CIM.pdf>
286. Tall, D. (2004). Reflections on Research and Teaching of Equations and Inequalities. *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, I, 158–161.
287. Tall, D. O. & Thomas, M. O. J. (2001) The long-term cognitive development of symbolic algebra. *International Congress of Mathematical Instruction (ICMI) Working Group Proceedings – The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, 2, 590– 597. Melbourne, Australia.
288. Tanner, L. N. (1988). The path not taken: Dewey's model of inquiry. *Curriculum Inquiry*, 18(4), 471-479.
289. Теодосић, Р. (1970). Проблемска настава. *Настава и васпитање*, 19(3), 258-268.
290. Terhart, E. (2001). *Metode poučavanja i učenja*. Zagreb: Educa.
291. Terwel, J., Van Oers, B., Van Dijk, I. and Vanden Eeden, P. (2009). Are representations to be provided or generated in primary mathematics education? Effects on transfer. *Educational Research and Evaluation*, 15 (1), 25–44.
292. Tomić, R. & Osmić, I., (2006). *Didaktika*, Tuzla: Offset.
293. Tuminaro, J. & Redish, E.F. (2007). Elements of a cognitive model of physics problem solving: Epistemic games. *Physical Review Special Topics*, 3(2), 020101-1-020101- 22.
294. Turns, S. R. & Van Meter, P. N. (2011). *Applying knowledge from educational psychology and cognitive science to a first course in thermodynamics*. Retrieved December 4, 2018 from <https://www.asee.org/public/conferences/1/papers/186/download>
295. Thomas, J.W. (2000). *A review of research on project-based learning*. Posjećeno: 23. decembra 2018. Dostupno na: <http://www.autodesk.com/foundation>.
296. Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte(Eds.), *The ideas of algebra, K-12: NCTM 1988 Yearbook* (pp. 8–19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
297. Usiskin, Z. (1997). Doing algebra in grades K-4. *Teaching children mathematics*, 3, 346-356.
298. Filloy, E. & Rojano, T. (1985). Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts and teaching strategies. In Streefl and, L. (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*(I, 154–158). Utrecht, The Netherlands: State University of Utrecht.
299. Foster, R. (1994). Counting on Success in Simple Arithmetic Tasks. *Proceedings of the 18th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 360–367. Lisbon:Portugal.
300. Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be useful? *Educational Studies in Mathematics*,1 (1), 3–8.
301. Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company / Dordrecht - Holland.
302. Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

303. Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promoting Multiple Representations in Algebra. In Cuoco, A. & Curcio, F. R. (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (173–185). Reston, VA: NCTM.
304. Furlan, I. (1966). *Moderna nastava i intenzivnije učenje*. Zagreb: Školska knjiga.
305. Fuson, K., Carroll, W. & Drueck, J. (2000). Achievement Results for Second and Third Graders Using the Standards-Based Curriculum Everyday Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 277-295.
306. Haines, C. & Crouch, R. (2001). Recognizing constructs within mathematical modelling. *Teaching Mathematics and its Applications*, 20(3), 129-138.
307. Haines, C. & Crouch, R. (2007). Mathematical modeling and applications: Ability and competence frameworks. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 417-424). New York, NY: Springer.
308. Хајдуковић-Јандрић, Г. и Обадовић, Д. (2007). Проблемски заснована почетна настава физике: *Педагошка стварност*, 53(5–6), 451–461.
309. Harvey, J., Waits, B. and Demana, F. (1995). The Influence of Technology on the Teaching and Learning of Algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 75–109.
310. Harun, N. G., Yusof, K. H., Jamaludin, M. Z., Helmi, S. A. & Hassan, S. (2012). Motivation in problem-based learning implementation. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 56, 233-242.
311. Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 239-255). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
312. Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetics and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27 (1), 59–78.
313. Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic Mathematics Education as work in progress”, F.L. Lin (Ed.) *Common Sense in Mathematics Education – Proceedings of 2001 the Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, Taipei, Taiwan, pp.1-40.
314. Higginson, W. (1982). Symbols, Icons, and Mathematical Understanding. *Visible Language*, XVI (3), 239–248.
315. Hidayah, R., Salimi, M. & Susiani, T. S. (2017). Critical thinking skill: Konsep dan indikator penilaian. *Jurnal Taman Cendekia*, 1(2), 127–133.
316. Hmelo-Silver, E. (2004). Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn?, *Educational Psychology Review*, 16, (3), 235-266.
317. Hung, W., Jonassen, D. H. & Liu, R. (2009). Problem-based learning. In J. M. Spector, M. D. Merrill, J. V. Merrienboer & M. P. Driscoll. (Eds.). *Handbook of Research on Educational Communications and Technology* (485-506). London: Lawrence Erlbaum Associates
318. Cabassut, R. (2010). The double transposition in mathematisation at primary school. *Proceedings of CERME 6*, January 28th–February 1st 2009. Lyon, France.
319. Cai, J. & Knuth, E. (2011). A Global Dialogue About Early Algebraization from Multiple Perspectives, Early Algebraization, In E. Cai & J. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. vii – xi). Berlin-Heidelberg: Springer.
320. Carpenter, T. P. & Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. Research report No. 00-2. Wisconsin, Madison: National Center for improving student learning and achievement in mathematics and science.
321. Carpenter, T. P., & Romberg, T. A. (2004). *Powerful practices in mathematics & science: Research-based practices for teaching and learning*. Madison: University of Wisconsin.

322. Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669–706). Charlotte, NC: Information Age.
323. Carraher, D., Schliemann, A. D. & Schwartz, J. (2007). Early Algebra Is Not the Same as Algebra Early. In Kaput, J., Carraher, D. and Blanton, M. (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (235–272). Mahwah, NJ: Erlbaum.
324. Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2015). Powerful ideas in elementary school mathematics. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 191–218). New York: Taylor & Francis.
325. Carry, L. R., Lewis, C., & Bernard, J. (1980). *Psychology of Education Solving: An Information Processing Study*. Austin: University of Texas at Austin, Department of Curriculum and Instruction.
326. Цвијановић, Г. (2016). Концептуализација појма рана алгебра и раноалгебарско мишљење. *Истраживање математичког образовања*, VIII, (14), 1-8.
327. Цекуш, Г. & Наместовки, Ж. (2005). Примена рачунара на наставним часовима, *Информатика, образовна технологија и нови медији у образовању*, Сомбор, 1, (16-29).
328. Collins, A. (1987). Cognitive Apprenticeship: Teaching the Craft of Reading, Writing, and Mathematics. Technical Report No. 403.
329. Cotić, M., & Zuljan-Valenčić, M. (2009). Problem-based instruction in mathematics and its impact on the cognitive results of the students and on affective-motivational aspects. *Educational Studies*, 35(3), 297–310.
330. Crawford, A. R. (2001). Developing algebraic thinking: Past, present, and future. In Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. and Vincent, J. (Eds.), *The Future of the Teaching and learning of Algebra, Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (192–198). Chick, Melbourne: University of Melbourne.
331. Crowder, N. A. (1960). *Automatic Tutoring by Intrinsic Programming*,. NEA, Washington.
332. Chamberlin, A. S. (2010). Mathematical problems that optimize learning for academically advanced students in grades K–6. *Journal of Advanced academics*, Prufrock Press, 1 (22), pp. 52-76.
333. Chan, C.M.E. (2007). Using open-ended mathematics problems: A classroom experience (Primary). In C. Shagar & R. B. A. Rahim (Eds.), *Redesigning pedagogy: Voices of practitioners*, Singapore: Pearson Education South Asia, 129-146 .
334. Chang, H., Wang, N., Ko, W., Yu, Y., Lin, L., & Tsai, H. (2017). The effectiveness of clinical problem-based learning model of medico-jurisprudence education on general law knowledge for Obstetrics/Gynecological interns. *Taiwanese Journal of Obstetrics & Gynecology*, 56(3), 325–330.
335. Charles, R. & Lester, F. K. (1984). An evaluation of a process-oriented mathematical problem-solving instructional program in grades five and seven. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), 15- 34.
336. Чижмешаја, А. (2006). *Пројектна настава математике*. Загреб: Природно-математички факултет.
337. Španović, S. (2008). Uloga stručne prakse studenata – budućih učitelja u sticanju profesionalnih kompetencija. u S. Budić (ur.), *Didaktičko – metodički aspekti studentske prakse u partnerskim relacijama fakulteta i škola* (119-159). Novi Sad: Filozofski fakultet, Odsek za pedagogiju.
338. Wagner, S., Rachlin, S. & Jenesen, R. J. (1984). *Algebra Learning Project: Final Report*. Athens: University of Georgia, Department of Mathematics Education.

339. Warren, E. (2003). Young children's understanding of equals: A longitudinal study. In N.A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 379–386). Honolulu, HI: PME.
340. Watson, J. (1990). Research for teaching: Learning and teaching algebra. *Australian Mathematics Teacher*, 46(3), 12-14.
341. Watters James, J., English, L. & Mahoney, S. (2000). *Mathematical Modeling in the Elementary School*. Australia: Queensland University of Technology .
342. Watters, J.J., English, L. and Mahoney, S. (2000). *Mathematical Modeling in the Elementary School*. Australia: Queensland University of Technology.
343. Welder, R. M. (2012). Improving Algebra Preparation: Implications from Research on Student Misconceptions and Difficulties. *School Science and Mathematics*, 112, 255-264
344. Weyl, H. (1995). Part I. Topology and Abstract Algebra as Two Roads of Mathematical Comprehension. *American Mathematical Monthly*, 102, No. 5: 453.
345. Woodlief, A. M. (2007). Changing the Paradigm: Hypertext and Interactive. *Student-Centered Learnin*. <http://horizon.unc.edu/>.
346. Wollman, W. (1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 169-181.
347. Won, M. (2009). *Issues in Inquiry based science education seen through Dewey's theory of inquiry*. Retrieved December 15, 2018. From <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.175.9982&rep=rep1&type=pdf>
348. Wong, N. Y. (2005). The Positioning of Algebraic Topics in the Hong Kong Elementary School Mathematics Curriculum. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 37(1), 23-33.
349. Yildirim, T. P., Shuman, L., Besterfield-Sacre, M., & Yildirim, T. P. (2010). Model eliciting activities: assessing engineering student problem solving and skill integration processes. *International Journal of Engineering Education*, 26(4), 831-845.

ПРИЛОЗИ

Прилог 1

Иницијални тест

1. Реши једначине, а потом доврши слике које им одговарају:

а) $x + 340 = 1250$

$x =$ _____

$x =$ _____

Пр. _____

x	340

б) $2300 - x = 1000$

$x =$ _____

$x =$ _____

Пр. _____

2300	

2. На основу дате једначине нацртај слику, а потом је реши.

$3 \cdot x = 210$

3. Милош је имао одређену суму новца, брату је дао 700 динара и остало му је 480 динара. Колико је Милош имао новца?

4. Реши следећу неједначину:

$x - 350 > 795$

5. Одреди скуп решења следећих неједначина помоћу табеле:

а) $900 + x < 1450$

x								
900 + x								

$x \in \{ \quad \quad \quad \}$

б) $2500 - x > 200$

x								
2500 - x								

$x \in \{ \quad \quad \quad \}$

6. На основу слике запиши једначину, па је реши.

480					
x	x	x	x	x	x

Састави текстуални задатак који одговара слици (једначини).

7. Одреди решење следеће једначине:

$$5 \cdot x + 786 = 1336$$

8. Одреди скуп решења следеће неједначине:

$$960 + (300 - x) < 1100$$

9. Милош је путовао од Београда до Суботице. Прво је ишао возом од Београда до Новог Сада и тако прешао 95km, потом је из Новог Сада кренуо аутобусом до Суботице. Колико километра је Милош прешао аутобусом, ако је удаљеност између Београда и Суботице 190km?

Састави једначину, па реши задатак.

10. Површине правоугаоника М и N су једнаке. Дужина једне странице правоугаоника М је 10cm. Колика је дужина друге странице правоугаоника М, ако су странице правоугаоника N дужине 14cm и 15cm. Скицирај слику према датим подацима, а потом реши задатак.

11. Уочи правило по коме је попуњена следећа табела.

<i>a</i>	1	2	3	4	5	6
<i>b</i>	3	5	7	9	11	13

На основу правила које си уочио напиши једнакост која показује однос између *a* и *b*.

Прилог 2

I финални тест

1. Реши једначине, а потом нацртај слике које им одговарају:

а) $x - 430 = 2350$

$x =$ _____

$x =$ _____

Пр. _____

Слика

б) $560 : x = 70$

$x =$ _____

$x =$ _____

Пр. _____

Слика

2. Сељанка је на пијаци један дан продала мање од 200 јаја. Одреди колико је кутија продала ако је у свакој било 25 јаја.

Запиши неједначину: _____

Табела ће ти помоћи при решавању, попуни је.

Шта закључујеш на основу табеле?

_____.

Која су решења неједначине? _____.

Одговор: _____.

3. Марко је замислио неки број, када га је поделио са 6 добио је број који није мањи од броја 120. Истражи које је бројеве Марко могао да замисли?

Који је најмањи број Марко могао да замисли? _____.

Запиши још три броја која је Марко могао да замисли? _____.

4. На основу слике запиши неједначину, потом одреди скуп њених решења.

2000	
350	n

2000	
	n

Састави текстуални задатак који одговара неједначини (слици).

5. Сара је од свог џепарца сакупила 1500 динара. Када је добила новац од баке, још увек није могла да купи књигу која кошта 2340 динара. Колико је новца Сара могла да добије од баке?

6. На основу дате слике запиши једначину па је реши.

1330					
180	x	x	x	x	x

Састави текстуални задатак који одговара слици (једначини).

7. Саша скупља сличице фудбалера. Када би сакупио још три пута толико сличица колико их сада има, недостајало би му 12 сличица да би имао 100. Колико сличица има Саша?

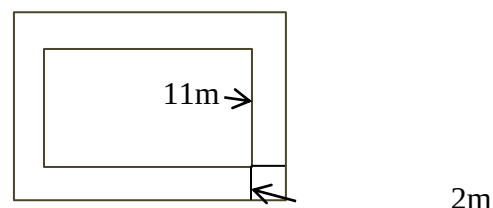
8. Када неки број увећаш 5 пута, а затим увећаш за 340, добићеш број већи од 840. Истражи који то бројеви могу бити?

Запиши неједначину: _____

Реши неједначину:

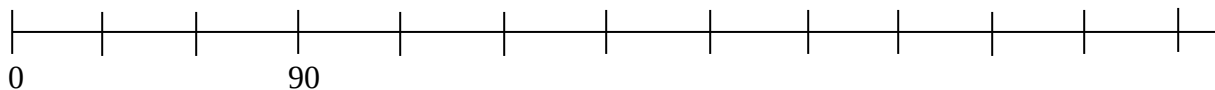
Одговор: _____

9. Површина дворишта укључујући и стазу износи 240m^2 . Ширина стазе је 2m. Ако је ширина дворишта без стазе 11m, колика је дужина дворишта?



10. Мотоциклиста прешао одређену стазу за три дана. Првог дана је прешао 180km, а другог два пута мање него првог дана. Колико километара је прешао трећег дана ако је дужина целе стазе 330 km?

Представи пут мотоциклисте на бројевној полуправој.

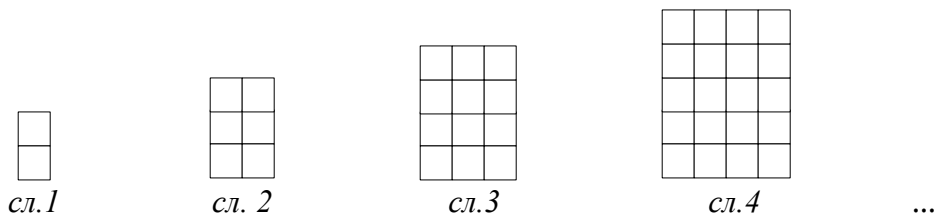


Састави једначину, па реши задатак.

Прилог 3

II финални тест

1. Ана и Сања су се играле погађања замишљеног броја. Ана каже: „Мој замишљени број је најпре умањен 4 пута, потом је добијеном количнику дописана једна 0 и све то повећано за 9 десетица, а потом удвостручено. На крају, када су одбачене последње две цифре које су биле нуле, остао је број 5“. Који број је замислила Ана?
2. На шаховском турниру ученици Милан, Стефан и Јован, представљали су своја одељења. Један од њих је био IV_1 , други IV_2 , а трећи IV_3 одељење. Прву партију играли су Милан и ученик из IV_1 ; другу партију играо је Стефан са учеником из IV_3 , а Милан се одмарао. У ком одељењу је сваки од њих?
3. Посматрај слику и покушај да уочиш како се мења број квадратића на њима.



- а) Шта можеш да закључиш о односу броја редова и броја квадратића у једном реду на свакој слици? _____
 - б) Колико квадратића ће бити на 11. слици? _____
 - в) Покушај да запишеш израз који означава број квадратића који ће бити на n -тој слици. _____
4. Уочи правило по коме је попуњена табела.

m	5	6	7	8	9	10
n	8	10	12	14	16	18

- а) Покушај да опишеш речима правило које си уочио.

- б) Запиши једнакост која показује однос између m и n .

- в) Састави један текстуални задатак који одговара изразу који запишеш (и табели): _____

Прилог 4

Протокол интервјуа

Циљ овог интервјуа је да сазнамо твоје ставове и мишљење о математици и настави математике. Замолићемо те да одговориш на следећа питања:

Испитивач: *Оливера Живановић*

Испитаник: _____

Место интервјуисања: *ОШ „Боривоје Ж. Милојевић“ у Крупњу.*

Време интервјуисања: *13h.*

Питања		Одговори
1.	Да ли волиш математику? Зашто?	
2.	Сматраш ли да је математика потребна у животу? Због чега?	
3.	Да ли су ти се допали часови математике које сам ја одржала?	
4.	Да ли су се ови часови разликовали од других часова математике? У чему је разлика?	
5.	Да ли би нешто променио на тим часовима?	
6.	Да ли би више волео оваквих часова математике? Због чега?	
7.	Који задаци су ти били најлакши за решавање на тим часовима?	
8.	Када си имао највише потешкоћа приликом решавања задатака на тим часовима?	
9.	Који задаци су ти били најзанимљивији на тим часовима? Наведи их.	
10.	Шта је најважније што си научио на тим часовима?	

Прилог 5

Модели припрема часова обраде и утврђивања у експерименталној настави

1.

Општи подаци	
Назив школе:	ОШ „Боривоје Ж. Милојевић “ Крупањ
Разред:	IV
Оперативни подаци	
Наставна јединица:	Неједначине са множењем и дељењем
Тип часа:	Обрада
Циљ и задаци часа:	
а) образовни:	
▶ материјални:	Да ученици усвоје знања која се односе на начине решавања неједначина у вази са множењем и дељењем. Да открију различите и нове начине решавања, те да знају научено да примене у решавању практичних задатака.
▶ функционални:	Да ученици развијају способности логичког, критичког, стваралачког, аналитичког и апстрактног мишљења. Да самостално долазе и изналазе решења. Да развијају способност памћења. Да ученици усавршавају мисаоне операције (апстракција, конкретизација, генерализација и аналогија). Да примењују усвојена знања у новим ситуацијама.
б) васпитни:	Развијати код ученика истрајност у раду, позитиван однос према раду, упорност, тачност, сигурност, систематичност, објективност, самоконтролу, такмичасрки дух и дружељубивост. Развијање основне математичке културе потребне за сагледавање улоге и примене математике у различитим подручјима човекове делатности (математичко моделовање) за успешно настављање образовања.

СТРУКТУРАЛНИ ПЛАН ИЗВОЂЕЊА ЧАСА

Фазе часа/ Окви-рно време	Активност наставника	Активност ученика	Методе/Облици рада	Исходи Ученици:	Материјали	Напомена
Уводни део часа: 10 минута	Задаје ученицима задатак усменим путем у вези са свакодневицом; Најављује циљ часа; Показује ученицима пано који ће им помоћи да реше уводни -мотивациони задатак; Показује ученицима пано у вези са једначинама са множењем и дељењем, те захтева тумачење истог математичким језиком.	Решавају задати задатак; Математичким терминима тумаче приказе једначина и подсећају се правила за израчунавање непознатог чиниоца, дељеника и делиоца; Израђују алгоритам израчунавања наведених непознатих компоненти.	Монолошка метода; Дијалoшка метода; Демонстративно-илустративна метода; Фронтлани облик рада; Индивидуални облик рада;	-решавају текстуални задатак користећи претходно стечена знања; -објашњавају шематски приказ паноа, те изводе и износе закључке.	Прилог бр. 1 П ₁ ¹⁷ -пано- Прилог бр. 2 П ₁ -пано-	Заинтересовати и мотивисати ученике за активно учествовање у раду кроз даљи ток часа, поновити претходно научено градиво како би се надовезало ново.
Главни део часа: 28 минута	Дели наставне листиће на којима се налазе задаци у вези са неједначинама са множењем и дељењем; Мотивише ученике (награда); Поставља питања усмерена на откривање и уочавање правила у вези са наставном јединицом; Проверава решења задатака.	Решавају задатке, цртају и допуњују шеме на основу којих долазе до решења и на основу којих изводе и откривају математичка правила; Израђују и откривају алгоритме решавања неједначина у вези са множењем и дељењем;	Дијалoшка метода; Демонстративно-илустративна метода; Метода писаних радова; Фронтални облик рада; Индивидуални облик рада;	- употребљавају претходно стечена знања и користе новостечена знања при решавању задатака; - примењују стечена знања у новим ситуацијама; - изводе закључке.	Прилог бр. 3 П ₁ -пано-наст. лист.- Прилог бр. 4 П ₁ Прилог бр. 5 П ₁ Прилог бр. 6 П ₁	Уз помоћ адекватних примера и шема навести ученике да уоче правила и алгоритме решавања неједначина у вези са множењем и дељењем;

¹⁷ Како бисмо извршили класификацију прилога који се конкретно односе на припрему, с обзиром на остале прилоге у раду, прилоге из припреме за час означили смо као: Прилог бр.1п₁, Прилог бр.2п₁, итд. што значи: Прилог број 1 у првој припреми, Прилог број 2 у првој припреми, итд.

		Развијају такмичарски дух; Прворевају тачност својих решења.			-пано- -наст. лист.-	Индивидуалним ангажовањем ученика утврдити степен усвојености знања.
Завр- шни део часа: 7 минута	Дискутује са ученицима о утисцима на часу; Задаје ученицима задатак за домаћи и објашњава очекивања.	Исказују своје мишљење у вези са часом, лепе листиће предвиђене за домаћи задатак и слушају упутства наставника.	Дијалoшка и монологска метода; Метода писаних радова; Фронтални облик рада; Индивидуални облик рада-у дискусији;	-говоре о утисцима о квалитету часа и упознају се са карактеристикама домаћег задатка.	Прилог бр. 7 П ₁	Захтевати од ученика да искажу своје ставове у вези са часом и припремити их за израду домаћег задатка.

ОПЕРАЦИОНАЛИЗАЦИЈА ПЛАНА РАДА

Уводни део (10 минута):

Да би се ученици заинтересовали усменим путем ћу им прочитати задатак који је повезан са свакодневним животом, а они ће га решити ослањајући се на претходно стечена знања.

Марко је имао одређену количину новца, брат му је дао 125 динара и сада има више од 240 динара. Колико је Марко могао да има новца?

Како ћемо поставити задатак да бисмо одговорили на питање?

Неко од ученика записује поставку задатка на табли: $x + 125 > 245$

Дакле саставили смо једну...? неједначину.

Шта нам је познато у овој неједначини, а шта не? Познат нам је други сабирак, а непознат први сабирак.

Ко ће на датом паноу да нас подсети на поступак израчунавања непознатог сабирка (излазе два ученика и помажу један другом да се пано попуни)? (Прилог бр.1 п₁)

Наставник лепи на таблу нови пано (Прилог бр.2 п₁) на коме се налазе три примера једначина (које ће решавати 3 ученика) у вези са множењем и дељењем, како би се ученици подсетили правила израчунавања непознатог чиниоца, дељеника и делиоца. На тај начин ученици математичким терминима тумаче приказе једначина дате на паноу, те изграђују алгоритам решавања постављених једначина.

Дакле, претходни задатак решили смо уз помоћ једне...? неједначине.

Сада смо се подсетили као се израчунава непознат...? чинилац, дељеник и делилац.

Шта мислите шта ћемо научити на овом часу што до сада нисмо, а има везе са претходним питањима? ...ученици дају различите одговоре.

Наставник све те одговоре обједињује и најављује циљ часа.

Најава циља часа: *На овом часу научићемо како се и на које све начине могу решавати неједначине у вези са множењем и дељењем.*

Главни део (28 минута):

Наставник дели наставни листић ученицима на коме се налази текстуални задатак у вези са неједначином која је у вези са множењем тј. непознатим чиниоцем (Прилог бр.3 п₁).

1.Продавац је у књижари за један дан продао мање од 90 маркера. Одреди колико је кутија продао ако је у свакој било по 15 маркера.

Запиши неједначину која одговара постављеном задатку: $x \cdot 15 < 90$

Непознат је...? први чинилац.

Реши једначину: $x \cdot 15 = 90$

$$x = 90 : 15$$

$$x = 6$$

На основу зависности производа од промене чиниоца вредност израза $x \cdot 15$ опада када x опада. Можеш да закључиш да су решења неједначине $x < 6$, то јест x

∈ {5, 4, 3, 2, 1}.

Ову неједначину можеш решити и уз помоћ табеле. Попуни табелу као што је започето.

x	1	2	3	4	5	6	7	...
$x \cdot 15$	15	30	45	60	75	90	105	...

Шта можеш да закључиш из табеле? x не може бити број 6, већ бројеви који су мањи од њега. Ако би x био број 6 онда бисмо добили $6 \cdot 15 = 90$, а нама су потребни бројеви мањи од броја 90. Дакле решења су бројеви мањи од броја 6.

Која су решења неједначине? $x \in \{5, 4, 3, 2, 1\}$.

Одговор : Продавац је могао да прода 5, 4, 3, 2 или 1 кутију маркера.

Проверу тачности решења извршићемо путем панона на коме се налази урађен задатак.

Наставник дели следећи наставни листић ученицима (Прилог бр.4п₁) а тачност добијених решења проверава усменим путем и поделом листића на коме се налази решен задатак (овај наставни листић одлика је неједначине са непознатим дељеником) . *Пажљиво прочитајте задатак, а потом на основу ранијег искуства поставите га и решите, те изведите правилне закључке. Време за решавање је 5 минута ко први уради тачно и изведе исправне закључке биће награђен тако што ће добити занимљиву оловку (наставник показује ученицима оловку). Овај гест посматрамо као мотивационо средство за ученике, а истовремено развијамо и такмичарски дух међу њима.*

2. Милица је имала одређен број бомбона, када их је поделила на 5 другарица остало јој је више од 10 бомбона. Колико је Милица могла да има бомбона?

Запиши неједначину: $x : 5 > 10$

Непознат је..?дељеник.

Реши једначину: $x : 5 > 10$

$$x > 10 \cdot 5$$

$$x > 50$$

На основу зависности производа од промене дељеника вредност израза $x : 5$ расте ако x расте. Можеш да закључиш да су решења неједначине $x > 50$, то јест $x \in \{55, 60, 65, \dots\}$.

Ову неједначину такође можеш решити и уз помоћ табеле. Попуни табелу као што је започето.

x	5	10	...	50	55	60	65	...
$x : 5$	1	2	...	10	11	12	13	...

Шта можеш да закључиш на основу табеле? x не може бити број 50, већ бројеви који су већи од њега. Ако би x био број 50 онда бисмо добили $50 : 5 = 10$, а нама су потребни бројеви већи од броја 10. Дакле решења су бројеви који су већи од броја 50.

Која су решења неједначине? $x \in \{55, 60, 65, \dots\}$.

Одговор: Милица је могла да има 55, 60, 65 итд. бомбона.

Наставник дели ученицима следећи наставни листић (Прилог бр. 5п₁) на коме се налази неједначина где је непознат умањилац, тачност овог задатка проверава тако што ће неко од ученика решити задатак на табли.

3. Реши следећу неједначину тако што ћеш нацртати табелу, па запиши шта закључујеш.
 $80 : x > 16$

x	1	2	4	5	8	10	...
$80 : x$	80	40	20	16	10	8	...

x не може бити број 5, већ бројеви који су мањи од њега. Ако би x био број 5 онда бисмо добили $80 : 5 = 16$, а нама су потребни бројеви већи од броја 16. Дакле решења су бројеви који су мањи од броја, тј. $x < 5$.

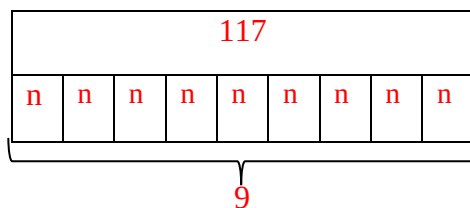
Шта можеш да закључиш у вези са знаком код ове неједначине? Закључујем да се знак променио.

Која су решења неједначине? $x \in \{4, 3, 2, 1\}$.

Наставник дели ученицима наставни листић (Прилог бр.6п₁) где ће ученици на основу дате неједначине допунити слику а потом је решити. Провера решења врши се путем панона (на коме се налази већ решен задатак).

4. Реши неједначину $9 \cdot n < 117$, у скупу природних бројева (N).

Представимо ситуацију сликом:



Рачунај прво вредност n за $9 \cdot n = 117$

$$n = 117 : 9$$

$$n = 13$$

Да би вредност израза $9 \cdot n$ била мања од 117, вредност променљивог чиниоца треба да се смањује. Дакле $n < 13$. Скуп решења неједначине је $n \in \{12, 11, 10, \dots, 1\}$.

Завршни део (7 минута):

У завршном делу часа наставник ће утврдити колико су ученици задовољни часом, у смислу да ли би нешто променили (и шта), додали, изоставили и сл. То ће учинити кроз вођење дијалога са ученицима. Потом наставник ученицима задаје домаћи задатак који се налази на наставном листићу (Прилог бр.7п₁) и даје додатна упутства и објашњења уколико је то неопходно.

Задаци за домаћи рад:

1. Реши следећу неједначину уз помоћ табеле: $250 : x < 50$.
2. Реши неједначину $m \cdot 6 > 198$ преко решавања једначине, а пре тога представи дату ситуацију сликом.

ПРИЛОЗИ ИЗ ПРИПРЕМЕ¹⁸

Прилог бр.1 п₁ – пано-

Марко је имао одређену количину новца, брат му је дао 125 динара и сада има више од 240 динара. Колико је Марко могао да има новца? (састави неједначину па реши задатак).

Слика ће ти помоћи при решавању.

240	
x	125

x	125
---	-----

1.	Запиши неједначину:	$x + 125 > 240$
2.	Запиши као једначину.	$x + 125 = 240;$
3.	Именуј компоненте:	Први сабирак, други сабирак, збир.
4.	Шта је познато?	Познат је други сабирак.
5.	Шта је непознато?	Непознат је први сабирак.
6.	Реши једначину.	$x = 240 - 125;$ $x = 115$
7.	Подсети се правила зависности збира од промене сабирака.	Да би вредност израза $x + 125$ била већа од 240, променљиви сабирак треба да се повећа.
8.	Запиши.	$x > 115$
9.	Запиши скуп решења ове неједначине.	$x \in \{116, 117, 118, \dots\}$
10.	Запиши одговор на постављено питање у задатку.	Марко је могао да има више од 115 динара.

Прилог бр. 2п₁ –пано-

Реши следеће једначине:

а) $4 \cdot x = 124$

б) $240 : x = 6$

в) $x : 30 = 7$

Непознат је: **чиницац**

Непознат је: **делилац**

Непознат је: **дељеник**

$x = 124 : 4$

$x = 240 : 6$

$x = 7 \cdot 30$

$x = 31$

$x = 40$

$x = 210$

Пр. $4 \cdot 31 = 124$

Пр. $140 : 40 = 6$

Пр. $210 : 30 = 7$

Прилози бр.3п₁,4п₁,5п₁,6п₁представљају наставне листиће на коме се налазе задаци који су већ разрађени у припреми. Прилог бр.7п₁ је наставни листић на коме се налазе садржаји предвиђени за домаћи задатак.

¹⁸ **Црвеном бојом** означени су предвиђени одговори ученика. При подели наставних листића ученицима та места биће празна, осим наставних листића који имају сврху првере решења.

2.

Општи подаци	
Назив школе:	ОШ „Боривоје Ж. Милојевић “ Крупањ
Разред:	IV
Оперативни подаци	
Наставна јединица:	Неједначине са множењем и дељењем
Тип часа:	Утврђивање
Циљ и задаци часа:	
а) образовни:	
▶ материјални:	Да ученици утврде и прошире своја знања која се односе на решавање неједначина у вази са множењем и дељењем, те да открију нове начине решавања која су у функцији решавања сложенијих неједначина.
▶ функционални:	Да ученици развијају способности логичког, критичког, стваралачког, аналитичког и апстрактног мишљења. Да самостално долазе и изналазе решења. Да развијају способност памћења. Да ученици усавршавају мисаоне операције (апстракција, конкретизација, генерализација и аналогија). Да примењују усвојена знања у новим ситуацијама.
б) васпитни:	Развијати код ученика истрајност у раду, позитиван однос према раду, упорност, тачност, сигурност, систематичност, објективност, самоконтролу, дружељубивост и такмичарски дух. Развијање основне математичке културе потребне за сагледавање улоге и примене математике у различитим подручјима човекове делатности (математичко моделовање) за успешно настављање образовања.

СТРУКТУРАЛНИ ПЛАН ИЗВОЂЕЊА ЧАСА

Фазе часа/ Окви-рно време	Активност наставника	Активност ученика	Методе/Обли-ци рада	Исходи Ученици:	Мате-ријали	Напомена
Уводни део часа: 10 минута	Провера домаћег задатка и отклањање недоумица у вези са истим ако постоје; Дели листиће; Показује пано ученицима; Најављује циљ часа;	Износе решење домаћег задатка и решавају недоумице уколико их има; Ученици решавају задатке на листићу а потом три ученика излази пред таблу да попуни пано у вези са датим задацима; Ученици објашњавају математичким терминима шта је непознато и како се израчунава. Математички се изражавају у вези са правилима која су им неопходна за решавање датих задатака.	Монолошка метода; Дијалoшка метода; Демонстрати-вно-илустративна метода; Фронтлани облик рада; Индивидуални облик рада.	-решавају једноста-вне неједначи-не задате математи-чким симболима ; - користе математи-чке термине при објашња-вању алгоритама ; - доносе закључке и утврђују знања стечена на претхо-дном часу.	Прилог бр. 1п₂ 19	Заинтере-совати и мотивиса-ти ученике за активно учество-вање у раду кроз даљи ток часа, поновити градиво научено на претхо-дним часовима.
Главни део часа: 28 минута	Дели наставне листиће на којима се налазе задаци у вези са неједначинама са множењем и дељењем; Мотивише ученике (награда за три најуспешнија ученика);	Решавају задатке, цртају и допуњују шеме на основу којих долазе до решења и на основу којих изводе закључке; Изграђују и откривају алгоритме решавања	Дијалoшка метода; Метода писаних радова; Фронтални облик рада;	- употре-бљавају, проширују и утврђују претходно стечена знања ; -примењу-ју стечена знања у новим ситуација-ма;	Прилог бр. 2п₂ Прилог бр. 3п₂ Прилог бр. 4п₂ Прилог бр. 5п₂	Уз помоћ адекват-них примера и шема навести ученике да примене правила и алгоритме решавања

¹⁹ Прилог бр.1 п₂ – прилог број 1 у другој припреми и сл.

	Поставља питања усмерена на откривање и уочавање правила у вези са наставном јединицом; Прати рад ученика; Проверава решења задатака.	сложених неједначина у вези са множењем и дељењем и утврђују и проширују алгоритме решавања једноставних неједначина у вези са множењем и дељењем; Развијају такмичарски дух; Прворевају тачност својих решења.	Индивидуални облик рада.	-изводе закључке.	неједначина у вези са множењем и дељењем;
Завршни део часа: 7 минута	Дискутује са ученицима о утисцима на часу; Даје ученицима објашњења у вези са домаћим задатком.	Исказују своје мишљење у вези са часом тако што ће сваки од ученика подизањем руке у вис да гласа за смајли који описује данашњи час ☺ ☹, дају објашњења зашто баш тај смајли, те слушају упутства за спровођење домаћег задатка.	Дијалогска и монолошка метода; Фронтални облик рада; Индивидуални облик рада-у дискусији;	-говоре о утисцима о квалитету часа и упознају се са карактеристикама домаћег задатка.	Захтевати од ученика да искажу своје ставове у вези са часом уз помоћ смајлија ☺ ☹ и припремити их за израду домаћег задатка.

ОПЕРАЦИОНАЛИЗАЦИЈА ПЛАНА РАДА

Уводни део (10 минута):

Након провере тачности домаћег задатка и отклањања нејасноћа (уколико их има) прелазимо на имплементацију проблемске наставе. Ученици добијају наставни листић на коме се налазе три једноставна примера у вези са неједначинама са непознатим чиниоцем, дељеником и делиоцем. Потребно је препознати непознату компоненту, а потом присетити се и утврдити правило на основу ког се та компонента израчунава. Примери се налазе на паноу, три ученика ће попунити пано и математичким терминима тумачити постављене неједначине (Прилог бр.1п₂). Самим тим ученици ће се подсетити, а уједно и утврдити правила и алгоритме који су важни за решавање неједначина.

*Шта мислите шта је тема данашњег часа? **решавање неједначина са множењем и дељењем.***

Наставник најављује циљ часа након обједињавања различитих одговора ученика у једну складну целину: *Дакле, данас ћемо утврдити оно што смо научили на претходном часу, а то је решавање неједначина у вези са множењем и дељењем.*

Главни део (28 минута):

Наставник дели ученицима наставни листић (Прилог бр. 2п₂) на коме се налази текстуални задатак у вези са неједначином, код које је непозната компонента делилац. Ученици реагују математичким записом на текст задатка, а потом уз помоћ табеле решавају неједначину (несвесно развијају способност математичког моделовања).

1. Алекса је имао 120 сличица, отишао је у школу и поделио сличице на неколико другара, када је дошао кући схватио је да му је остало више од 30 сличица. Колико другара је могло да добије сличице од Алексе?

Запиши неједначину која одговара постављеном задатку: $120 : x > 30$

Табела ће ти помоћи да решиш неједначину, попуни је.

x	1	2	3	4	5	6	...
120:x	120	60	40	30	24	20	...

Шта можеш да закључиш из табеле? *x не може бити број 4, већ бројеви који су мањи од њега. Ако би x био број 4 онда бисмо добили $120:4 = 30$, а нама су потребни бројеви већи од броја 30. Дакле решења су бројеви мањи од броја 4.*

Запиши решења неједначине? $x \in \{3,2,1\}$.

Одговор : Од Алексе су сличице могли да добију 3 друга, 2 друга или 1 друг.

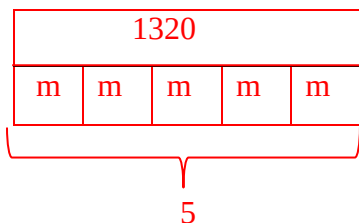
Проверу тачности решења извршићемо решавањем задатка на табли од стране неког од ученика (могуће је и да различити ученици решавају по део задатка).

Ученици добијају следећи наставни листић (Прилог бр.3п₂) на коме се налази задатак у вези са неједначином са непознатим чиниоцем (ученици утврђују своје постојеће знање, проширују га и сусрећу се са новим изазовима). Ученицима нагласити да прва три ученика који успешно реше овај задатак добиће занимљиве оловке (поклон је у функцији награде).

2.Реши следећу неједначину.

$$5 \cdot m > 1320$$

Представи дату ситуацију сликом.



Рачунај прво вредност m за $5 \cdot m = 1320$.

$$m = 1320 : 5$$

$$m = 264$$

Да би вредност израза $5 \cdot m$ била већа од 1320, вредност променљивог чиниоца треба да се повећа. Дакле $m > 264$. Скуп решења неједначине је $m \in \{265, 266, 267 \dots\}$.

Састави текст који одговара датој ситуацији (неједначини):

Виноградар је једног дана засадио више од 1320 струкова винове лозе. Одреди по колико струкова винове лозе је могао да засади на 5 њива? (текстови могу бити различити од стране ученика).

Повратну информацију о исправности поступка и решења задатка ученици добијају путем решеног наставног листића.

Наставник дели ученицима наставни листић (Прилог бр.4п₂) на коме се налази текстуални задатак где ученици треба да покажу своју спремност у овладавању новим ситуацијама. Провера овог задатка извршиће се радом на табли.

3. Милена је замислила неки број. Када је тај број умањила 2 пута добила је број мањи од 720. Који је број Милена могла да замисли? Састави неједначину, а потом је реши.

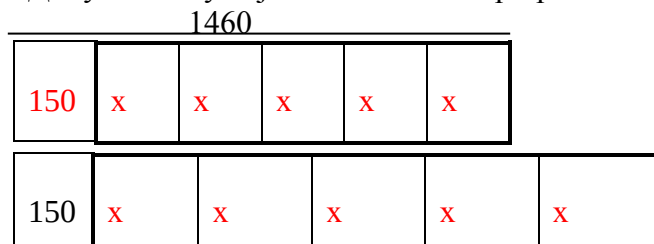
$$x : 2 < 720$$

Ученици решавају неједначину на њима најлакши начин (преко табеле или помоћу решавања једначине).

4. Реши следећу неједначину (Прилог бр. 5п₂):

$$150 + 5 \cdot x > 1460$$

Допуни слику која ће ти помоћи при решавању.



Први сабирак је 150, а други сабирак је $5 \cdot x$.

Прво решавамо једначину:

$$150 + 5 \cdot x = 1460$$

$$5 \cdot x = 1460 - 150$$

$$5 \cdot x = 1310$$

$$x = 1310 : 5$$

$$x = 262$$

Да би вредност збира била већа од 1460, променљиви сабирак, $5 \cdot x$ треба да се повећа.

$$5 \cdot x > 1460 - 150$$

$$5 \cdot x > 1310$$

$$x > 1310 : 5$$

$x > 262$ Скуп решења неједначине је: $x \in \{263, 264, 265, \dots\}$.

Завршни део (7 минута):

У завршном делу часа наставник ће утврдити колико су ученици задовољни часом, тако што ће свако од ученика гласати за срећан ☺ или тужан смајли ☹ подизањем руке у вис (смајлићи ће бити нацртани на табли). Када констатујемо који је смајли победио извршићемо анализу часа кроз дискусију са ученицима. Потом наставник ученицима задаје домаћи задатак који се састоји у следећем: сваки ученик свом пару из клупе треба да састави неки текстуални задатак у свесци у вези са данашњом лекцијом, а потом да на следећем часу пред почетак провери тачност задатка који је поставио (свом другу или другарици).

ПРИЛОЗИ ИЗ ПРИПРЕМЕ

Прилог бр.1п₂

Реши следеће неједначине тако што ћеш попунити наредну табелу:

НЕЈЕДНАЧИНЕ		$x \cdot 5 < 200$	$x : 7 > 100$	$240 : x > 60$
1.	Запиши као једначину.	$x \cdot 5 = 200$	$x : 7 = 100$	$240 : x = 60$
2.	Шта је непознато?	први чинилац	дељеник	делилац
3.	Реши једначину.	$x = 200 : 5, x = 40$	$x = 100 \cdot 7, x = 700$	$x = 240 : 60, x = 4$
4.	Подсети се правила зависности производа и количника од промене компонентата (чиниоца, дељеника, делиоца).	Да би вредност израза $x \cdot 5$ била мања од 200, променљиви чинилац треба да се смањи.	Да би вредност израза $x : 7$ била већа од 100, променљиви дељеник треба да се повећа.	Да би вредност израза $240 : x$ била већа од 60, променљиви делилац треба да се смањи.
5.	Запиши.	$x < 40$	$x > 700$	$x < 4$
6.	Запиши скуп решења ове неједначине.	$x \in \{39, 38, \dots, 1\}$	$x \in \{701, 702, 703, \dots\}$	$x \in \{3, 2, 1\}$

Прилози бр. 2п₂, 3п₂, 4п₂ и 5п₂ представљају наставне листиће на коме се налазе задаци који су већ разрађени у припреми.

Прилог 6

Снимак часа у контролној групи

Након одабира школа које су учествовале у истраживању и избора експерименталне и контролне групе посетили смо час математике у току реализације истраживања у контролној групи. Као што је општепознато сваки наставни час има свој уводни, главни и завршни део, те ћемо у складу са тим представити посматрани час кроз наведене етапе.

У уводном делу часа наставник ученицима прегледа домаћи задатак уз давање инструкција како га је било потребно решити уколико у томе нису успели. Потом, обавештава ученике о наставној јединици коју ће радити на данашњем часу и записује наслов на табли. Ученици преписују наслов у своје свеске и припремају се за помно праћење и слушање наставника.

Након кратког увода, наставник приступа реализацији главног дела часа. Путем фронталног облика рада наставник почиње са предавањем. Пошто је тип часа био обрада, а наставна јединица *Решавање неједначина у вези са множењем и дељењем* на табли је најпре записао сва правила која су значајна за изражавање непознатих компоненти (чинилац, дељеник, делилац) и урадио три примера. Ученици, прате наставу, преписују са табле, труде се и покушавају да запамте и разумеју оно што наставник пише и очекују даље информације. Наставник врло често поставља питања ученицима, али на њих сам одговора, пре него што добије повратну информацију. Уз постављено питање „Да ли је ово јасно?“, ученици углавном сви углас одговарају: „Јесте.“ Тако се завршава интеракција између ученика и наставника. Потом, наставник задаје неколико примера које ученици треба самостално да реше и на тај начин покажу своја усвојена знања. Тишина и усмерено преписивање са табле као да показује да сви ученици све знају, међутим када су ученици требали самостално да решавају задатке пред таблом, ситуација се показала другачијом. Углавном се јаве два или три иста ученика који су успешно решила постављене задатке, изађу пред таблу, репродукују своје знање и реше задатке, док остали ученици и даље преписују у своје свеске. Наставник хвали ученике који су исправно решили задатке и обично тим ученицима постави питање: „Није тешко, зар не?“, они одговарају: „Није!“. У току пружања готивих информација ученицима наставник се ослања на уџбеник и прати како је ова наставна јединица осмишљена и конципирана у истом.

Завршни део часа подразумевао је задавање домаћег задатка уз диктирање редног броја задатка и стране на коме се задатак у уџбенику налази.

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора: Оливера Живановић
Број индекса: 3003/2015

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом „Ефекти проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања“

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Аутор

У Београду, 2019. године

Оливера Живановић

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: Оливера Живановић

Број индекса: 3003/2015

Студијски програм: Методика разредне наставе

Наслов рада: „Ефекти проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања“

Ментор : прф. др Јасмина Милинковић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањена у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Аутор

У Београду, 2019. године

Оливера Живановић

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом: „Ефекти проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања“ која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

Аутор

У Београду, 2019. године

Оливера Живановић

Биографија аутора

Оливера (Славко) Живановић рођена је 06.09.1990. године у Лозници. Основну школу завршила је 2005. године у Крупњу. Гимназију-општег смера завршила је такође у Крупњу, 2009. године. Звање дипломирани учитељ стекла је 2013. године на Учитељском факултету у Ужицу Универзитета у Крагујевцу, а 2015. године одбранила је мастер рад под називом „Скупови и њихова улога у почетној настави математике“ на истоименом факултету, са оценом 10. На Учитељском факултету Универзитета у Београду 2015. године уписује докторске студије на модулу Методика наставе математике. Пријава теме докторске дисертације под називом „Ефекти проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања“ одобрена је од стране Већа научних области друштвено-хуманистичких наука Универзитета у Београду 23.10.2018. године.

Аутор је девет радова, од који је седам објављено у различитим часописима и зборнику. Четири рада чини саопштење на научним скуповима међународног значаја од којих су два објављена у целости, док се преостала два налазе у зборницима резимеа. До сада је била учесник и излагач следећих научних скупова: (1) *Савремени приступи у професионалном развоју и раду васпитача и учитеља*, који је одржан 25.05.2018. на Учитељском факултету у Београду Универзитета у Београду; (2) *Даровитост, образовање и развој*, који је одржан 31.07.-02.08.2018 у хотелу *Metropol Palace* у Београду, чији је организатор била Менса Србије; (3) *Програмске (ре)форме у образовању и васпитању – изазови и перспективе*, који је одржан 20.05.2019. на Учитељском факултету у Београду Универзитета у Београду; (4) *Наука и настава данас*, који је одржан 1.11. 2019. на Педагошком факултету у Бијељини Универзитета у Источном Сарајеву.